

A. Bc. 59722

SC/C/899

# Distorsión por funciones internas y comportamiento radial de funciones holomorfas

Domingo Pestana Galván



Director de tesis:  
José Luis Fernández Pérez

Memoria para aspirar al grado de Doctor  
en Ciencias Matemáticas

Departamento de Matemáticas  
de la Universidad Autónoma de Madrid

Madrid, Febrero de 1.994

x-54-126883-9

*A mi familia,*

*y a José Luis Rubio de Francia,  
mi primer maestro.*

Conocí a José Luis Fernández hace unos cuantos años cuando comencé a estudiar Matemáticas y él cursaba tercero de carrera. Nunca sospeché que, después de todo, él sería mi Director de tesis, probablemente porque él era y es, sobre todo, mi amigo. Pero en verdad que tampoco podré olvidar nunca su entrega, generosidad y todo el tiempo y comprensión que me ha dedicado. Por eso esta tesis es para mí algo más que el fruto de cuatro años y pico de duro trabajo. Gracias Josechu, gracias, maestro.

No puedo dejar pasar estas líneas sin recordar a José Manuel Rodríguez, José González y María Melián por el apoyo y colaboración que siempre he encontrado en ellos. Lo mejor que puedo decir es que me he divertido pensando y haciendo Matemáticas con ellos, especialmente con Mavi, con quien he tenido la inmensa suerte de colaborar en dos artículos, y con José Manuel, con quien he trabajado durante los últimos meses. Además debo expresar mi gratitud a José Manuel por el esmero y diligencia con que se ha leído el manuscrito original y por sus siempre atinadas sugerencias.

Quiero agradecer también a mi amigo Angel Cabrera, porque cuando aún era alumno del Departamento, me puso en contacto con Josechu.

Gracias a todos vosotros.

MADRID, FEBRERO DE 1.994

# Indice

Notaciones.	i
Introducción.	1
<b>Capítulo 1: Nociones básicas.</b>	<b>9</b>
1.1. Sistemas dinámicos.	9
1.2. Funciones internas. Lema de Löwner.	13
1.3. Funciones univalentes. Lema de Löwner.	19
1.4. Contenidos.	20
1.5. Capacidades.	22
1.6. Diámetro transfinito.	29
1.7. Capacidad, contenido y dimensión de Hausdorff	30
1.8. Función de Green de un dominio plano.	32
1.9. Uniformización, métrica hiperbólica y exponente de convergencia	35
<b>Capítulo 2: Distorsión del contenido de conjuntos frontera.</b>	<b>41</b>
2.1. Funciones univalentes: Teorema de Makarov.	42
2.2. Funciones internas.	43
2.3. Un ejemplo en dimensión $n = 1$ .	50
<b>Capítulo 3: Distorsión de la capacidad de conjuntos frontera.</b>	<b>53</b>
3.1. Funciones univalentes: Teoremas de Pommerenke y Hamilton.	54
3.2. Funciones internas.	60
3.2.1. El teorema de distorsión capacitaria para funciones internas clásicas.	60
3.2.2. El teorema de distorsión capacitaria para funciones internas en la bola unidad de $\mathbb{C}^n$ .	71
3.3. Aplicaciones de la expresión integral de la energía.	85
<b>Capítulo 4: Aplicaciones y resultados adicionales         en dimensión dos.</b>	<b>89</b>
4.1. Precisión del Teorema 2.	89
4.2. Resultados ergódicos.	92
4.3. Extensiones del Teorema 2.	97

<b>Capítulo 5: Distorsión de subconjuntos del disco por funciones internas.</b>	<b>103</b>
5.1. Distorsión de medidas de Hausdorff: Teorema de Hamilton.	103
5.2. Distorsión de la capacidad logarítmica.	107
<b>Capítulo 6: Aplicaciones al estudio del comportamiento radial de funciones holomorfas.</b>	<b>113</b>
<b>Referencias.</b>	<b>133</b>

## NOTACIONES

A lo largo de la tesis los teoremas originales se enumeran desde 1 hasta 12. Los teoremas de otros autores se ordenan utilizando las letras del alfabeto A, B, ... Los lemas y proposiciones utilizados en la demostración de los teoremas se enumeran utilizando dos números: el primero indica el capítulo y el segundo el orden dentro del mismo. Por ejemplo, el Lema 5.3 es el tercer lema del Capítulo 5.

La medida de Lebesgue se denotará unas veces por  $L$  y otras por  $|\cdot|$ . Cuando sea necesario se indicará si la medida está normalizada o no.

La notación  $|\cdot|$  también se utilizará para indicar el módulo de un número complejo o la norma de  $x \in \mathbb{R}^N$ , sin que ello cause confusión. En cambio  $\|\mu\|$  podrá designar o bien la masa total de la medida  $\mu$ , o bien la norma de la medida  $\mu$  con respecto a un cierto producto escalar.

Como es habitual,  $C$ ,  $C_\alpha$ ,  $C(\alpha, \beta)$  designarán constantes que dependen de los argumentos mostrados y que pueden variar de línea a línea, o incluso en la misma línea, a pesar de seguir denotándose igual.

La abreviatura *c.t.p.* se usará en lugar de la frase “en casi todo punto” con respecto a la medida que se indique, omitiéndose ésta si es la medida de Lebesgue o esta claro en el contexto, de forma que no pueda inducir a confusión.

La lista que sigue incluye las notaciones y símbolos que aparecen más frecuentemente a lo largo de la tesis.

$\Delta$	Disco unidad del plano complejo: $\{z \in \mathbb{C} :  z  < 1\}$
$\partial\Delta$	Circunferencia unidad: $\{z \in \mathbb{C} :  z  = 1\}$
$\mathbb{B}_n$	Bola unidad de $\mathbb{C}^n$ : $\{z \in \mathbb{C}^n :  z  < 1\}$
$\partial\mathbb{B}_n$	Esfera unidad de $\mathbb{C}^n$ : $\{z \in \mathbb{C}^n :  z  = 1\}$
$\Sigma_{N-1}$	Esfera unidad de $\mathbb{R}^N$
$M_\alpha(A)$	$\alpha$ -contenido de $A$ (ver p. 20)
$H_\alpha(A)$	Medida de Hausdorff $\alpha$ -dimensional de $A$ (ver p. 20)
$\text{cap}_\alpha(A)$	$\alpha$ -capacidad (de Riesz) de $A$ (ver p. 22)
$\text{cap}_0(A)$	Capacidad logarítmica de $A$ (ver p. 22)
$d(a, b)$	La distancia en $\partial\mathbb{B}_n$ dada por el producto escalar usual de $\mathbb{C}^n$
$\text{Dim}(A)$	Dimensión de Hausdorff usual de $A$ (ver p. 20)
$\text{Dim}(A)$	Dimensión de Hausdorff de $A \subset \partial\mathbb{B}_n$ con respecto a la métrica $d$
$P(\xi, z)$	Núcleo de Poisson clásico (ver p. 44)

$Q(\xi, z)$	Núcleo de Poisson invariante (ver p. 44)
$P_\nu(z)$	Extensión de Poisson clásica de la medida $\nu$ (ver p. 44)
$Q_\nu(z)$	Extensión de Poisson invariante de la medida $\nu$ (ver p. 44)
$\operatorname{Re} z$	Parte real del número complejo $z$
$\operatorname{Im} z$	Parte imaginaria del número complejo $z$
$I_\alpha(\mu)$	$\alpha$ -energía de la medida $\mu$ (ver p. 22)
$I_0(\mu)$	Energía logarítmica de la medida $\mu$ (ver p. 22)
$f^{-1}(E)$	Si $f$ es interna, el conjunto $\{\xi \in \partial\mathbb{B}_n : \exists \lim_{r \rightarrow 1} f(r\xi) \in E\}$
$\overset{\circ}{=}$	Igualdad salvo en un conjunto de medida de Lebesgue nula
$\overline{A}$	Clausura del conjunto $A$
$\partial A$	Frontera del conjunto $A$
$g_E(z)$	Función de Green de la componente conexa no acotada de $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$ con polo en infinito (ver p. 32)
$\Gamma(\cdot)$	Función Gamma de Euler
$B(\cdot, \cdot)$	Función Beta de Euler
$F( t )$	Función hipergeométrica de Gauss (ver p. 75)
$g_\alpha(t)$	La función $(2 - 2t)^{-\alpha/2}$
$\gamma_{n,\alpha}$	Coefficientes de Fourier de la función $\varphi_\alpha(t) =  1 - e^{it} ^{-\alpha}$ (ver p. 66)
$\hat{\mu}(n)$	Coefficientes de Fourier de la medida $\mu$ (ver p. 66)
$\mathcal{H}_k$	El espacio vectorial real de los armónicos esféricos de grado $k$ en $\mathbb{R}^N$
$\{Y_j^{(k)}\}_{j=1}^{a_k}$	Base de $\mathcal{H}_k$
$Z_\eta^{(k)}(\xi)$	Armónico zonal de grado $k$ con polo $\eta$ (ver p. 72)
$P_k^\lambda(t)$	Polinomio de Gegenbauer de grado $k$ y parámetro $\lambda$ (ver p. 72)
$T_k(t)$	Polinomio de Chebysev de grado $k$ (ver p. 73)
$g^{(k)}$	Coefficientes de Fourier de la función $ \xi - \eta ^{-\alpha}$ respecto de los armónicos zonales (ver p. 77)
$\mu_j^{(k)}$	Coefficientes de Fourier de la medida $\mu$ respecto de $\{Y_j^{(k)}\}_{j=1}^{a_k}$
$\omega_{N-1}$	Medida de superficie de $\Sigma_{N-1}$
$S(f)$	Conjunto de singularidades de la función interna $f$ (ver p. 14)
$\rho_{\mathcal{R}}$	Métrica hiperbólica de la superficie de Riemann $\mathcal{R}$ (ver p. 37)
$\Lambda(\Gamma)$	Conjunto límite del grupo $\Gamma$ (ver p. 39)
$C(\Gamma)$	Conjunto límite del grupo discreto $\Gamma$ (ver p. 39)
$\delta(\mathcal{R})$	Exponente de convergencia del grupo de cubrimiento de la superficie de Riemann $\mathcal{R}$ (ver p. 39)
$\omega(z, E)$	Medida armónica de $E \subset \partial\Delta$ respecto de $z \in \Delta$

## Introducción

El objetivo primordial de esta tesis es el estudio del comportamiento radial de funciones holomorfas  $f : \Delta \rightarrow \mathcal{R}$ , donde  $\Delta$  denota el disco unidad del plano complejo,  $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ , y  $\mathcal{R}$  es una superficie de Riemann hiperbólica, es decir,  $\Delta$  es su recubridor universal. En particular los resultados que obtendremos se aplican al caso en que  $\mathcal{R} = \Omega$ , un dominio plano hiperbólico, esto es, un dominio plano tal que su complemento contiene al menos dos puntos.

El método utilizado para obtener nuestros resultados consiste en factorizar  $f$  a través del cubrimiento universal,  $F : \Delta \rightarrow \mathcal{R}$ , de  $\mathcal{R}$ , esto es

$$(0.1) \quad \begin{array}{ccc} & \Delta & \\ & \nearrow b & \\ \Delta & \xrightarrow{f} & \mathcal{R} \\ & \searrow F & \end{array} \quad f = F \circ b$$

La razón heurística por la que es de esperar que tal proceder conduzca a la obtención de resultados sobre el comportamiento radial de  $f$ , es que el cubrimiento universal suele ser la función de comportamiento extremo entre las que aplican  $\Delta$  en  $\mathcal{R}$ . De hecho, cuando uno conoce el teorema correcto para el caso en que  $f$  es el cubrimiento universal, tiene ya una idea de cuál es el resultado que debe verificarse para una función holomorfa cualquiera porque uno puede suponer que  $b$  es interna, ya que éste suele ser el caso difícil.

Observemos que un teorema de este tipo para el cubrimiento universal  $F$ , se traduce en un resultado sobre comportamiento asintótico de geodésicas en la métrica de Poincaré de  $\mathcal{R}$ .

Esta distinción es fundamental, puesto que las técnicas utilizadas para estudiar el comportamiento de geodésicas en  $\mathcal{R}$  son completamente diferentes a las usadas en el contexto general ya que en el primer caso uno tiene a su disposición la simetría que da el grupo de cubrimiento y el conocimiento de la geometría del recubridor universal, esto es, el disco unidad o el semiplano superior. Ejemplos de aplicación de tales técnicas se encuentran en dos artículos ([MP] y [DMPV]) que he escrito



en colaboración con M. V. Melián, M. Dodson y S. Velani, y en el reciente trabajo [FM] de J. L. Fernández y M. Melián.

Pasamos ahora a una descripción pormenorizada de los principales resultados de esta tesis. Para nomenclatura, definiciones básicas y resultados generales referimos al lector al Capítulo 1.

Los resultados que probaremos en el Capítulo 6 se refieren al tamaño del conjunto de direcciones en que  $f$  está acotada (cuando  $\mathcal{R} = \Omega$  es un dominio plano), y más generalmente al del conjunto de direcciones en que la curva imagen  $\{f(re^{i\theta})\}_{0 \leq r < 1}$  permanece a distancia hiperbólica acotada de un punto prefijado  $p \in \mathcal{R}$ .

Concretamente, se tiene que los conjuntos de direcciones mencionados a pesar de que pueden ser de medida nula, son “grandes” pues su dimensión de Hausdorff lo es:

**Teorema 12.** *Sea  $\mathcal{R}$  una superficie de Riemann hiperbólica y sea  $p$  un punto de  $\mathcal{R}$ . Si  $f : \Delta \rightarrow \mathcal{R}$  es holomorfa, entonces*

$$\text{Dim}\{\theta : d(\theta) < +\infty\} \geq \delta(\mathcal{R}),$$

donde

$$d(\theta) = \sup_{0 \leq r < 1} \rho(f(re^{i\theta}), p),$$

$\delta(\mathcal{R})$  es el exponente de convergencia del grupo de cubrimiento de  $\mathcal{R}$  y  $\rho$  denota distancia hiperbólica en  $\mathcal{R}$ .

Así pues el Teorema 12 resuelve totalmente el problema. Además el teorema es exacto, pues J. L. Fernández y M. Melián han probado (Teorema I, Capítulo 6) que se obtiene igualdad en el Teorema 12, cuando  $f : \Delta \rightarrow \mathcal{R}$  es el cubrimiento universal de  $\mathcal{R}$ .

Para dominios planos la condición  $d(\theta) < +\infty$  significa que la curva imagen  $\{f(re^{i\theta})\}$  permanece a distancia esférica positiva de la frontera topológica de  $\Omega$ . Un teorema acerca de dominios planos es el Teorema 9 en el que se estima en cuántas direcciones la imagen del radio permanece alejada de un punto aislado de  $\partial\Omega$ . Además hemos logrado extender el Teorema 9 en el sentido de que se obtiene la misma conclusión no sólo si  $f$  omite dos puntos, sino si  $f$  toma al menos dos valores un número finito de veces. Esta extensión constituye el Teorema 11.

**Teoremas 9 y 11.** *Si  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa y toma (al menos) dos puntos solamente un número finito de veces, entonces*

$$\text{Dim}\{\theta : \sup_{0 \leq r < 1} |f(re^{i\theta})| < \infty\} = 1.$$

*En particular, la misma conclusión es válida si  $f$  omite (al menos) dos puntos.*

Obsérvese que el Teorema 9 es más débil que el Teorema 12. La razón por la que se incluye es doble: por un lado, porque se usa en la prueba del Teorema 11 (su extensión); por otra, porque ilustra la técnica conocida como "localización" en la que se estudia el comportamiento de  $f$  en un cierto simplemente conexo usando la aplicación de Riemann del mismo. La utilización de este método en los Teoremas 9 y 12, hace que éstos sean, en última instancia, consecuencia de los teoremas de distorsión de subconjuntos de la circunferencia unidad por funciones univalentes. Por el contrario, la prueba del Teorema 12 requiere, además, los teoremas de distorsión de conjuntos frontera por funciones internas contenidos en los Capítulos 2 y 3 de esta tesis.

Una breve idea de cómo probar estos resultados es la siguiente: primero factorizamos  $f = F \circ b$  como se indicó arriba; si la función  $b : \Delta \rightarrow \Delta$  no es interna, entonces no hay nada que probar pues entonces el conjunto en cuestión no sólo tiene dimensión de Hausdorff 1, sino medida positiva. Así pues el caso difícil es, precisamente, aquél en que  $b$  es interna, y la razón heurística de por qué la idea de descomponer  $f$  como  $f = F \circ b$  funciona, es que  $b$  aumenta el tamaño de las antiimágenes de subconjuntos de la circunferencia unidad (Teoremas 1 y 2). Más concretamente el Teorema 9, resulta ser una consecuencia de

**Teorema 10.** *Sea  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  interna y denotemos por  $E$  el conjunto en  $\Delta$  que  $f$  omite. Entonces, si  $E$  contiene al menos dos puntos*

$$\text{Dim}\{\theta : \sup_{0 \leq r < 1} |f(re^{i\theta})| < 1\} \geq \alpha(\rho_E),$$

donde  $\alpha$  es una función continua y monótona en  $[0, +\infty)$  con  $\alpha(x) > 1/2$ ,  $\alpha(0) = 1$ ,

$$\rho_E = \inf\{\rho(a, b) : a, b \in E, a \neq b\},$$

y  $\rho$  es la distancia hiperbólica en  $\Delta$ .

Si  $f$  no es un producto de Blaschke finito, entonces la misma conclusión es válida si  $E$  denota el rango finito de  $f$ .

Esto justifica el interés, por otro lado intrínseco desde el punto de vista dinámico, de averiguar cómo distorsiona una función interna el tamaño de conjuntos frontera. Tales resultados de distorsión son obtenidos en los Teoremas 1 y 2 (que se prueban en los Capítulos 2 y 3, respectivamente), y pueden considerarse generalizaciones del lema de Löwner a dimensiones fraccionarias. Enunciados conjuntamente nos dicen

**Teorema 1 + 2.** *Si  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  es una función interna con  $f(0) = 0$  y si  $E$  es un boreliano en  $\partial\Delta$ , entonces*

$$1) \text{ Si } 0 < \alpha \leq 1$$

$$(0.2) \quad M_\alpha(f^{-1}(E)) \geq C_\alpha M_\alpha(E),$$

donde  $M_\alpha$  denota  $\alpha$ -contenido.

2) Para todo  $\alpha$  con  $0 \leq \alpha < 1$ ,

$$(0.3) \quad \text{cap}_\alpha(f^{-1}(E)) \geq \text{cap}_\alpha(E),$$

donde  $\text{cap}_\alpha$  denota  $\alpha$ -capacidad.

Además, si  $\text{cap}_\alpha(E) > 0$ , entonces en (0.3) sólo puede ocurrir la igualdad si ó bien  $f$  es una rotación, ó bien  $\text{cap}_\alpha(E) = \text{cap}_\alpha(\partial\Delta)$ .

En particular, se sigue que para cualquier función interna y cualquier boreliano de  $\partial\Delta$ ,

$$\text{Dim}(f^{-1}(E)) \geq \text{Dim}(E).$$

Observemos que el enunciado de unicidad contenido en (0.3) tiene, entre otras, consecuencias dinámicas. Así por ejemplo, una función interna con  $f(0) = 0$ , no sólo es ergódica con respecto a la medida de Lebesgue, sino también con respecto a la  $\alpha$ -capacidad, es decir,

**Corolario.** Si  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  es interna,  $f(0) = 0$ , y  $f$  no es una rotación, entonces si  $E$  es un boreliano de  $\partial\Delta$  tal que la diferencia simétrica entre  $E$  y  $f^{-1}(E)$  tiene  $\alpha$ -capacidad cero ( $0 \leq \alpha < 1$ ), entonces, o bien  $\text{cap}_\alpha(E) = 0$ , o bien  $\text{cap}_\alpha(E) = \text{cap}_\alpha(\partial\Delta)$ .

El Teorema 1 + 2 puede generalizarse a dimensión superior, esto es a funciones internas en la bola unidad  $\mathbb{B}_n$  de  $\mathbb{C}^n$ . Más aún, con la misma técnica se obtiene un resultado análogo a (0.2) con contenido con respecto a la métrica  $d(a, b) = |1 - \langle a, b \rangle|^{1/2}$ ,  $a, b \in \partial\mathbb{B}_n$ . A ello se dedica el Capítulo 2, y concretamente uno tiene que

**Teorema 1.** Si  $f : \mathbb{B}_n \rightarrow \Delta$  es interna,  $f(0) = 0$ , y  $E$  es un boreliano de  $\partial\Delta$ , entonces, para  $0 < \alpha \leq 1$ ,

$$M_{2n-2+\alpha}(f^{-1}(E)) \geq C_{n,\alpha} M_\alpha(E)$$

y

$$\mathcal{M}_{2(n-1+\alpha)}(f^{-1}(E)) \geq C'_{n,\alpha} M_\alpha(E).$$

donde  $M_\alpha$  y  $\mathcal{M}_\alpha$  denota, respectivamente,  $\alpha$ -contenido con respecto a las métricas euclídea y la métrica  $d$ .

En particular si  $f : \mathbb{B}_n \rightarrow \Delta$  es una función interna cualquiera y  $E$  es un boreliano de  $\partial\Delta$ , entonces

$$\text{Dim}(f^{-1}(E)) \geq 2n - 2 + \text{Dim}(E)$$

y

$$\text{Dim}(f^{-1}(E)) \geq 2n - 2 + 2 \text{Dim}(E),$$

donde  $\text{Dim}$  and  $\text{Dim}$  denotan, respectivamente, la dimensión de Hausdorff con respecto a la métrica euclídea y la métrica  $d$ .

En la Sección 3.2.2 del Capítulo 3 se aborda la extensión de (0.3) a dimensión superior que, ante la necesidad de calcular los coeficientes de Fourier del núcleo capacitario, requiere el uso de armónicos esféricos y de funciones especiales. El resultado obtenido es

**Teorema 4.** Si  $f : \mathbb{B}_n \longrightarrow \Delta$  es interna,  $f(0) = 0$ , y  $E$  es un boreliano de  $\partial\Delta$ , entonces, si  $0 < \alpha < 1$ ,

$$\text{cap}_{2n-2+\alpha}(f^{-1}(E)) \geq K(n, \alpha) \text{cap}_\alpha(E),$$

donde

$$K(n, \alpha) = \frac{\Gamma(n-1 + \frac{\alpha}{2})}{(n-1)! \Gamma(\frac{\alpha}{2})},$$

y, para  $\alpha = 0$ ,

$$\frac{1}{\text{cap}_{2n-2}(f^{-1}(E))} \leq 1 + (2n-2) \log \frac{1}{\text{cap}_0(E)}, \quad (n > 1).$$

En particular, para cualquier función interna,

$$\text{Dim}(f^{-1}(E)) \geq 2n-2 + \text{Dim}(E).$$

La clave de la prueba de este teorema, así como de (0.3), consiste en encontrar una expresión integral de la energía de una medida en términos de la extensión de Poisson de la misma. Tal expresión se obtiene en el

**Teorema 5.** Si  $\mu$  es una medida con signo soportada en  $\Sigma_{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| = 1\}$ , tenemos que

i) Si  $0 < \alpha < N-1$ , entonces

$$I_\alpha(\mu) = C(N, \alpha) \int_0^1 \left\{ \int_{\Sigma_{N-1}} |P_\mu(r\xi)|^2 d\xi \right\} r^{\alpha-1} (1-r^2)^{N-2-\alpha} dr,$$

con

$$C(N, \alpha) = \frac{4\pi^{N/2}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2}) \Gamma(\frac{N-\alpha}{2})}.$$

ii) Si  $m = \mu(\Sigma_{N-1})$ , entonces

$$I_0(\mu) = \omega_{N-1} \int_0^1 \left\{ \int_{\Sigma_{N-1}} \left| P_\mu(r\xi) - \frac{m}{\omega_{N-1}} \right|^2 d\xi \right\} (1-r^2)^{N-2} \frac{dr}{r}$$

$$+ \frac{m^2}{2} \left[ \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{N}{2} \right) - \frac{\Gamma'}{\Gamma} (N-1) \right].$$

En particular, si  $N = 2$ ,

$$I_0(\mu) = 2\pi \int_0^1 \left\{ \int_0^{2\pi} \left| P_\mu(re^{i\theta}) - \frac{m}{2\pi} \right|^2 d\theta \right\} \frac{dr}{r}.$$

El Capítulo 4 se dedica a dar algunas aplicaciones de los Teoremas 1 y 2 (en dimensión dos) así como algunos resultados adicionales. Por ejemplo, el siguiente resultado resuelve un problema extremal

**Corolario.** Sea  $0 \leq \alpha < 1$ . Si  $I$  es cualquier intervalo en  $\partial\Delta$ , entonces  $I$  tiene la  $\alpha$ -capacidad mínima entre todos los borelianos de  $\partial\Delta$  con la misma medida de Lebesgue que  $I$ .

Este resultado es conocido para  $\alpha = 0$  (Alhfors en [A2, p. 35-36] lo atribuye a Beurling), pero no lo hemos encontrado en la literatura para  $\alpha > 0$ . En cualquier caso la prueba del mismo es novedosa, incluso para  $\alpha = 0$ .

De entre los resultados del Capítulo 4 cabe destacar la siguiente propiedad dinámica.

**Proposición 4.2.** Si  $f : \Delta \longrightarrow \Delta$  es interna pero no una rotación,  $f(0) = 0$ ,  $0 \leq \alpha < 1$ , y  $E$  es un subconjunto de Borel de  $\partial\Delta$  con  $\text{cap}_\alpha(E) > 0$ , entonces

$$\text{cap}_\alpha(f^{-k}(E)) \rightarrow \text{cap}_\alpha(\partial\Delta) \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty.$$

La última sección del Capítulo 4 contiene dos extensiones (Teoremas 6 y 7) del Teorema 2 para el caso en que  $f$  tiene orden mayor que 1 en el origen.

En el Capítulo 5 probamos un resultado de distorsión (Teorema 8) para subconjuntos del disco. Concretamente,

**Teorema 8.** Si  $f : \Delta \longrightarrow \Delta$  es interna,

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(k-1)}(0) = 0, \quad f^{(k)}(0) \neq 0, \quad (k \geq 1),$$

entonces

$$(0.4) \quad \text{cap}_0(f^{-1}(E)) \geq (\text{cap}_0(E))^{1/k},$$

para todos los borelianos de  $\Delta$ . Además la desigualdad no se puede mejorar.

Si  $f$  es un producto de Blaschke finito, entonces (0.4) es válida para todos los borelianos de  $\overline{\Delta}$  y, además, si  $E$  es un cerrado con  $\text{cap}_0(E) > 0$ , la igualdad en

(0.4) *sólo puede darse si o bien  $f(z) = \lambda z^k$ ,  $|\lambda| = 1$ , o bien  $\text{cap}_0(E) = \text{cap}_0(\overline{\Delta}) = \text{cap}_0(\partial\Delta)$ .*

Esta parte de la tesis ha sido motivada por un trabajo de D. Hamilton que, por otra parte, estuvo motivado por [FP]. En él, Hamilton probó un teorema de distorsión de medidas de Hausdorff de subconjuntos del disco (ver Teorema D, Sección 5.1), y conjeturó que la constante correcta en la desigualdad para capacidades del Teorema 1 de [FP] era  $C_\alpha = 1$ , como así resultó ser (Teorema 2 de esta tesis).

Los resultados conocidos anteriormente a este trabajo se encuentran básicamente en las Secciones 2.1 y 3.1. La Sección 5.1 contiene el resultado de D. Hamilton ya comentado en el párrafo anterior.

Una parte de los resultados nuevos que aparecen en esta tesis están contenidos en los artículos

[FP] Fernández, J. L., Pestana, D., **Distortion of boundary sets under inner functions and applications**. *Indiana Univ. Math. J.* **41** (1992), 439-447.

[FPR] Fernández, J. L., Pestana, D., Rodríguez, J. M., **Distortion of boundary sets under inner functions, II**. Preprint, 1993.

# Capítulo 1

## Nociones básicas

Este capítulo reúne la descripciones de ciertas herramientas, nociones, terminología y hechos básicos en los que se enmarcan los resultados de esta tesis. El capítulo se estructura de la siguiente forma:

- 1.1. Sistemas dinámicos.
- 1.2. Funciones internas. Lema de Löwner.
- 1.3. Funciones univalentes. Lema de Löwner.
- 1.4. Contenidos.
- 1.5. Capacidades.
- 1.6. Diámetro transfinito.
- 1.7. Capacidad, contenido y dimensión de Hausdorff.
- 1.8. Función de Green de un dominio plano.
- 1.9. Uniformización, métrica hiperbólica y exponente de convergencia.

### 1.1. Sistemas dinámicos.

En esta tesis estudiaremos propiedades dinámicas del sistema  $(\partial\Delta, L, f^*)$ , donde  $\partial\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ,  $L$  es la medida de Lebesgue normalizada,  $L(\partial\Delta) = 1$ , y  $f^*$  denota los valores radiales frontera de una función  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  interna con  $f(0) = 0$ . Por esto dedicaremos esta primera sección a exponer las propiedades más básicas de un sistema dinámico. A modo de ilustración daremos también algunos ejemplos.

**Definición 1.1.** *Un sistema dinámico es una cuaterna  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ , donde  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  es un espacio de medida (con frecuencia  $\mu$  es una medida de probabilidad) y*

$$T : (X, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow (X, \mathcal{A}, \mu)$$

*es un endomorfismo, esto es, una transformación medible que preserva la medida,*

$$\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A), \quad \text{para todo } A \in \mathcal{A}.$$

Observemos que  $\mu$  preserva medida si y sólo si

$$\int_X f d\mu = \int_X (f \circ T) d\mu,$$

para toda función  $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$  medible.

**EJEMPLOS:**

1)  $X = \partial\Delta$ ,  $\mu = L$ ,  $T(e^{i\theta}) = e^{id\theta}$  con  $d = 1, 2, \dots$

2) Sea  $E$  un conjunto de  $d$  símbolos,  $E = \{0, 1, 2, \dots, d-1\}$  y denotemos  $E^\infty = \prod_{n=1}^\infty E$ . Sea  $p$  una probabilidad en  $E$ , i.e.

$$p(\{j\}) = p_j, \quad \text{con } \sum_{j=0}^{d-1} p_j = 1.$$

Si  $P$  denota la medida de probabilidad producto en  $E^\infty$ , y

$$X_n : E^\infty \longrightarrow E$$

son las proyecciones, es claro que las  $X_n$  son idénticamente distribuídas e independientes. Sea  $T : E^\infty \longrightarrow E^\infty$  la transformación definida por

$$T((x_n)_{n=1}^\infty) = (x_{n+1})_{n=1}^\infty.$$

$T$  es conocida como el “shift” a derechas. Es sencillo comprobar que

$$(E^\infty, \mathcal{P}(E^\infty), P, T)$$

es un sistema dinámico.

3) Los ejemplos anteriores son básicamente el mismo pues  $E^\infty$  puede identificarse con el conjunto de desarrollos  $d$ -ádicos de los números en  $[0, 1]$ . Vía esta identificación es fácil ver que  $P$  no es otra cosa que la medida de Lebesgue en  $[0, 1]$ , y el “shift” a derechas coincide con la transformación  $T : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ ,  $Tx = dx \pmod{1}$ . El sistema dinámico así obtenido en  $[0, 1]$ , es a su vez el mismo (son isomorfos) que el del Ejemplo 1, vía la identificación  $e^{i\theta} \longleftrightarrow \theta/(2\pi)$ .



Aún más, todos estos sistemas dinámicos son casos particulares (con  $f(z) = z^d$ ) de otro más general, cual es  $(\partial\Delta, \mathcal{B}(\partial\Delta), L, f^*)$ , donde  $\mathcal{B}(\partial\Delta)$  denota a los borelianos de  $\partial\Delta$ , y  $f^*$  es la “restricción” a  $\partial\Delta$  de una función interna  $f : \Delta \rightarrow \Delta$ , con  $f(0) = 0$  (ver la Sección 1.2).

Una herramienta fundamental en el estudio de los sistemas dinámicos son los teoremas ergódicos. Si  $\mu$  es una probabilidad se tiene

**Teorema ergódico de Birkoff-Khinchin** [Si, p. 6]. *Sea  $f \in L^1(\mu)$ . Entonces*

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{f}(x), \quad \text{c.t.p. } x \in X,$$

y en  $L^1(\mu)$ . Además la función  $\hat{f}$  es  $T$ -invariante, i.e.

$$\hat{f}(Tx) = \hat{f}(x), \quad \text{c.t.p. } x \in X,$$

y

$$\int_X f d\mu = \int_X \hat{f} d\mu.$$

Tienen especial interés aquellos sistemas dinámicos para los cuales  $\hat{f}$  es constante (para toda  $f \in L^1(\mu)$ ), i.e. la media temporal  $\hat{f}$  coincide con la media espacial  $\int_X f d\mu$  (la esperanza matemática).

**Definición 1.2.** *Sea  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  un sistema dinámico con  $\mu$  una medida de probabilidad.  $T$  es ergódico si y sólo si para toda función  $f \in L^1(\mu)$ ,  $\hat{f}$  es constante, y por tanto*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \hat{f}(x) = \int_X f d\mu, \quad \text{c.t.p. } x \in X.$$

La ergodicidad tiene otras formulaciones equivalentes; de hecho equivale a la imposibilidad de descomponer el sistema en conjuntos  $T$ -invariantes no triviales.

**Definición 1.3.** *Sea  $A \in \mathcal{A}$ .*

- 1)  *$A$  es  $T$ -invariante si y sólo si  $A = T^{-1}(A)$ .*
- 2)  *$A$  es  $T$ -invariante (mod 0) si y sólo si  $\mu(A \Delta T^{-1}(A)) = 0$ .*

Aquí  $\Delta$  denota diferencia simétrica. Observemos que 2) equivale a decir que  $A = T^{-1}(A)$  salvo en un conjunto de  $\mu$ -medida nula. Para indicar este hecho usaremos la notación  $A \stackrel{\circ}{=} T^{-1}(A)$ .

**Proposición 1.1.** *Son equivalentes:*

- 1)  $T$  es ergódico.
- 2) Si  $A \stackrel{\circ}{=} T^{-1}(A)$  entonces,  $\mu(A) = 0$  ó  $\mu(A) = 1$ .
- 3) Toda función  $T$ -invariante es constante (c.t.p.).

En todo lo que sigue  $T^j = T \circ T \circ \dots \circ T$  es la  $j$ -ésima iterada de  $T$ , y  $T^{-j} = (T^j)^{-1}$ .

DEMOSTRACIÓN. 1)  $\implies$  2). Si  $A \stackrel{\circ}{=} T^{-1}(A)$ , es claro que  $\chi_A = \chi_{T^{-j}(A)} = \chi_A \circ T^j$  c.t.p., de donde  $\hat{\chi}_A = \chi_A$  en casi todo punto. Por otro lado, como  $T$  es ergódico,

$$\hat{\chi}_A(x) = \int_X \chi_A d\mu = \mu(A), \quad \text{c.t.p. } x \in X.$$

Por tanto,  $\chi_A(x) = \mu(A)$ , c.t.p.  $x \in X$ . Se sigue que ó bien  $\mu(A) = 0$ , ó bien  $\mu(A) = 1$ .

2)  $\implies$  3). Si  $f$  es  $T$ -invariante, para todos  $a, b \in \mathbb{R}$  los conjuntos

$$I_a^b f = \{x : a \leq f(x) \leq b\}$$

son  $T$ -invariantes (mod 0), de donde  $\mu(I_a^b f) = 0$  ó 1. Se sigue fácilmente que  $f$  debe ser constante en casi todo punto.

3)  $\implies$  1). Se sigue inmediatamente del teorema ergódico, pues  $\hat{f}$  es  $T$ -invariante para toda  $f \in L^1(\mu)$ , luego constante, por 3). ■

Todos los ejemplos mencionados anteriormente son sistemas ergódicos, salvo en el caso en que  $f^*(e^{i\theta}) = e^{i\alpha\theta}$  con  $\alpha$  irracional (ver la Sección 1.2).

Existen otras propiedades que son más fuertes que la ergodicidad. Nosotros estamos interesados en dos de ellas, *mezcla* y *exactitud*.

**Definición 1.4.**

- 1)  $T$  es de mezcla si para todos  $E, F$  medibles

$$\mu(T^{-n}(E) \cap F) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(E)\mu(F).$$

- 2)  $T$  es exacto si los únicos conjuntos  $A$  tales que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$A \stackrel{\circ}{=} T^{-n}(A_n), \quad \text{con } A_n \in \mathcal{A},$$

tienen  $\mu$ -medida 0 ó 1.

OBSERVACIÓN. Es claro que la exactitud implica la ergodicidad pero, de hecho, se verifica que

$$\text{exactitud} \implies \text{mezcla} \implies \text{ergodicidad}.$$

Veremos que cualquier función interna que no sea una rotación y que tenga un punto fijo en  $\Delta$ , digamos  $f(0) = 0$ , es exacta y, por tanto, es de mezcla y ergódica. De hecho se satisface una propiedad más fuerte de *mezcla uniforme* [P2, Lema 3] (ver la Sección 1.2).

## 1.2. Funciones internas. Lema de Löwner.

Una función interna es una función holomorfa  $f : \Delta \longrightarrow \Delta$  tal que

$$\exists \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta}) \stackrel{\text{def}}{=} f^*(e^{i\theta}), \quad |f^*(e^{i\theta})| = 1,$$

para casi todo  $e^{i\theta}$  (con respecto a la medida de Lebesgue en  $\partial\Delta$ ).

Aquí y en todo lo que sigue  $\Delta$  denota el disco unidad del plano complejo,  $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ , y  $\partial\Delta$  la circunferencia unidad,  $\partial\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ .

Es claro que una función interna  $f$  está acotada, es decir,  $f \in H^\infty(\Delta)$ . Por tanto, aunque  $f$  puede no estar definida en todo punto de  $\partial\Delta$ , por el teorema de Fatou,  $f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$  existe para casi todo  $e^{i\theta}$ , y por hipótesis,  $|f^*(e^{i\theta})| = 1$ , por lo que  $f^* : \partial\Delta \longrightarrow \partial\Delta$  está definida salvo en un conjunto de medida nula. En lo que sigue, para no complicar la notación, omitiremos la estrella aunque  $f$  esté actuando en  $\partial\Delta$ .

Aparte de sus propiedades dinámicas las funciones internas son importantes porque toda función  $f \in H^\infty(\Delta)$  puede factorizarse como (ver por ejemplo [G, Capítulo 2])

$$(1.1) \quad f(z) = e^{i\varphi} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{|a_j|}{a_j} \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z} \exp\left(-\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta)\right), \quad z \in \Delta,$$

donde  $\mu$  es una medida finita y positiva en  $\partial\Delta$ , y  $\{a_j\}$  es la sucesión de los ceros de  $f$ . Esta sucesión satisface la condición de Blaschke

$$\sum_j (1 - |a_j|) < +\infty$$

que asegura la convergencia del producto infinito en (1.1). Si algún  $a_j$  es cero, entenderemos que  $|a_j|/a_j = 1$ .

La función  $f$  es interna si y sólo si la medida  $\mu$  es singular (con respecto a la medida de Lebesgue). De hecho, (1.1) nos dice que toda  $f \in H^\infty(\Delta)$  puede factorizarse como  $f = E_f \cdot I_f$  donde

$$E_f(z) = \exp \left( -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log |f(e^{i\theta})| d\theta \right)$$

es una función holomorfa  $E_f : \Delta \longrightarrow \Delta$  sin ceros (suele llamarse a  $E_f$  una *función externa*) y

$$(1.2) \quad I_f(z) = e^{i\varphi} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{|a_j|}{a_j} \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z} \exp \left( -\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\nu(\theta) \right),$$

donde  $\nu$  es una medida singular, esto es,  $I_f$  es una *función interna*. Por tanto, (1.2) es la forma más general de una función interna.

Los productos de Blaschke,

$$f(z) = e^{i\varphi} z^k \prod_{j=1}^{\infty} \frac{|a_j|}{a_j} \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}, \quad (a_j \neq 0),$$

donde la sucesión  $\{a_j\}$  cumple la condición de Blaschke, y en particular las transformaciones de Möbius,

$$f(z) = e^{i\varphi} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad (|a| < 1),$$

son las funciones internas sin parte singular. De entre ellos, los productos de Blaschke finitos son precisamente las funciones internas tales que  $f : \partial\Delta \longrightarrow \partial\Delta$  es continua.

Por un teorema de Frostman (ver Capítulo 5, donde se enuncia) *toda función interna es, salvo componer con una transformación de Möbius adecuada, un producto de Blaschke.*

Una función interna sin ceros se llama una *función interna singular*,

$$f(z) = \exp \left( -\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\nu(\theta) \right), \quad \nu \text{ singular}.$$

Obsérvese que si  $\nu$  es la delta de Dirac soportada en 1, se obtiene la *función singular*,

$$f(z) = e^{-(1+z)/(1-z)}.$$

Si  $f$  es interna,  $f : \partial\Delta \longrightarrow \partial\Delta$  puede ser muy discontinua. De hecho, si  $z \in \partial\Delta$  es un *punto singular* de  $f$ , esto es, un punto tal que  $f$  no puede extenderse analíticamente a través de ningún entorno suyo (en  $\partial\Delta$ ), entonces  $f$  aplica todo entorno de  $z$  sobre  $\partial\Delta$ . Denotaremos por  $S(f)$  el conjunto de puntos singulares de

$f$ ;  $S(f)$  está formado por el conjunto de puntos de acumulación de los ceros  $\{a_j\}$  junto con el soporte de la medida  $\nu$ .

La dinámica de una aplicación holomorfa  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  está descrita por la siguiente

**Proposición 1.2** (Denjoy-Wolff, [D]). *Sea  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  holomorfa. Entonces, existe  $p \in \overline{\Delta}$  tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = p,$$

*uniformemente sobre compactos. Además, si  $p \in \Delta$ , y  $f$  no es Möbius, entonces  $f(p) = p$ , y  $|f'(p)| < 1$ , y si  $p \in \partial\Delta$ , entonces  $\lim_{r \rightarrow 1} |f'(rp)| \leq 1$ .*

El punto  $p$  suele ser denominado como el *punto de Denjoy-Wolff* para  $f$ .

Es una fácil consecuencia del lema de Schwarz que si  $f$  tiene un punto fijo  $p$  en  $\Delta$ , y  $f$  no es una transformación de Möbius (y, por tanto, tampoco una rotación), entonces  $p$  es su punto de Denjoy-Wolff y  $|f'(p)| < 1$ .

La importancia de que  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  interna, tenga un punto fijo en  $\Delta$  queda patente por el siguiente lema.

**Proposición 1.3** (Lema de Löwner). *Si  $f$  es interna, entonces  $f : \partial\Delta \rightarrow \partial\Delta$  preserva la medida de Lebesgue si y sólo si  $f(0) = 0$ .*

DEMOSTRACIÓN. Si  $f$  es una rotación, es decir, si  $f(z) = e^{i\varphi}z$ , esto es claro. Así pues, supongamos que  $f$  no es una rotación.

Supongamos primero que  $f(0) = 0$ . Denotemos por  $L$  la medida de Lebesgue normalizada en  $\partial\Delta$ . Es suficiente ver que

$$L(I) = L(f^{-1}(I)),$$

para todo intervalo (arco)  $I \subseteq \partial\Delta$ . Sea  $u$  la extensión de Poisson de  $\chi_I$ ,

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_I \frac{1-r^2}{|e^{it} - re^{i\theta}|^2} dt.$$

Como  $u$  o  $f$  es armónica y acotada, por el teorema de Fatou,  $u \circ f = P(h)$ , donde  $h \in L^\infty(\partial\Delta)$ , y

$$(u \circ f)(re^{i\theta}) \xrightarrow{r \rightarrow 1} h(e^{i\theta}), \quad \text{c.t.p. } \theta.$$

Por otro lado, por un teorema de Schwarz [A1, p. 169], también

$$u(se^{i\theta}) \xrightarrow{s \rightarrow 1} \chi_I(\theta),$$

en cada punto de continuidad de  $\chi_I(\theta)$ . Es decir,

$$u(se^{i\theta}) \xrightarrow{s \rightarrow 1} \begin{cases} 1, & \text{si } e^{i\theta} \in \text{Int}(I), \\ 0, & \text{si } e^{i\theta} \in \text{Ext}(I). \end{cases}$$

Por el principio de reflexión de Schwarz  $u$  puede prolongarse a través de  $\text{Int}(I)$  y de  $\text{Ext}(I)$  con lo que

$$(u \circ f)(re^{i\theta}) = u(f(re^{i\theta})) \xrightarrow{r \rightarrow 1} u(f(e^{i\theta}))$$

y, como  $f$  es interna, se deduce que en casi todo  $e^{i\theta}$ ,

$$(u \circ f)(e^{i\theta}) = \begin{cases} 1, & \text{si } f(e^{i\theta}) \in \text{Int}(I), \\ 0, & \text{si } f(e^{i\theta}) \in \text{Ext}(I). \end{cases}$$

Esto nos permite concluir que  $h = \chi_{f^{-1}(I)}$ , y finalmente que

$$L(f^{-1}(I)) = P(\chi_{f^{-1}(I)})(0) = u(f(0)) = u(0) = L(I).$$

Recíprocamente, si  $f : \partial\Delta \rightarrow \partial\Delta$  preserva la medida de Lebesgue, se sigue que para toda  $g : \partial\Delta \rightarrow \mathbb{C}$  medible,

$$\int_{\partial\Delta} g \, dL = \int_{\partial\Delta} (g \circ f) \, dL.$$

En particular, tomando  $g(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$ ,

$$0 = \int_0^{2\pi} e^{i\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} = f(0),$$

por el teorema de Cauchy. ■

Por tanto, si  $f$  es interna, para que  $(\partial\Delta, \mathcal{B}(\partial\Delta), L, f)$  sea un sistema dinámico es necesaria la hipótesis  $f(0) = 0$  que siempre estará presente en los próximos capítulos.

Sin embargo esta hipótesis no es tan restrictiva como parece, pues si  $f$  es interna y tiene un punto fijo  $p \in \Delta$ , entonces  $f$  preserva la medida armónica  $\lambda_p$ , de forma que en ese caso el sistema dinámico a considerar sería  $(\partial\Delta, \mathcal{B}(\partial\Delta), \lambda_p, f)$ . Las propiedades de todos estos sistemas dinámicos son equivalentes; de hecho son isomorfos a través de una transformación de Möbius adecuada que lleve uno en otro.

Recordemos que  $\lambda_p$  puede definirse como la única medida de probabilidad tal que

$$\int_{\partial\Delta} \Psi \, d\lambda_p = \bar{\Psi}(p),$$

para toda  $\Psi : \partial\Delta \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Aquí  $\bar{\Psi}(p)$  es la única extensión de  $\Psi$  que es continua en  $\bar{\Delta}$  y armónica en  $\Delta$ . Es decir,  $\bar{\Psi} = P(\Psi)$ , la integral de Poisson de  $\Psi$ . Observemos que, en particular, si  $p = 0$ ,  $\lambda_p = L$ .

Además, por un argumento de aproximación, es sencillo ver que si  $I \subseteq \partial\Delta$  es un intervalo,

$$\lambda_p(I) = P(\chi_I)(p) = \int_I \operatorname{Re} \frac{z+p}{z-p} dL(z),$$

lo que permite adaptar fácilmente la prueba del lema de Löwner para ver que  $f$  preserva  $\lambda_p$ .

Observemos también que para toda  $\Psi : \partial\Delta \rightarrow \mathbb{R}$  continua

$$\int_{\partial\Delta} \Psi d\lambda_p = P(\Psi)(p) = \int_{\partial\Delta} \operatorname{Re} \frac{z+p}{z-p} \Psi(z) dL(z),$$

y, por el teorema de representación de Riesz,  $\lambda_p$  es absolutamente continua respecto de  $L$ , y su derivada de Radon-Nikodym es

$$\frac{d\lambda_p}{dL}(z) = \operatorname{Re} \frac{z+p}{z-p}.$$

Si el punto fijo es  $p \in \partial\Delta$ , entonces  $f : \partial\Delta \rightarrow \partial\Delta$  no tiene una medida finita invariante que sea absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue, aunque puede tener una medida invariante  $\sigma$ -finita que puede ser ergódica o no. De hecho [Neu], *si  $f : \partial\Delta \rightarrow \partial\Delta$  tiene una medida de probabilidad  $\mu$  invariante y absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue, entonces  $f$  tiene un punto fijo  $p \in \Delta$ , y además  $\mu = \lambda_p$ .*

Volviendo al caso central,  $f(0) = 0$ , las propiedades ergódicas de  $f$  son

**Proposición 1.4.** (Ergodicidad). *Si  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  es interna y  $f(0) = 0$ , entonces  $f : \partial\Delta \rightarrow \partial\Delta$  es ergódica, salvo que  $f$  sea una rotación de ángulo racional.*

En efecto, el hecho de que entre las rotaciones sólo las de ángulo irracional son ergódicas, es conocido como teorema de Weyl-Von Neumann [Si, p. 25].

Si  $f$  no es una rotación, entonces

$$(1.3) \quad f^n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

uniformemente sobre compactos. Ahora, si  $E \stackrel{\circ}{=} f^{-1}(E)$ , y llamamos, como en la prueba del lema de Löwner,  $u = P(\chi_E)$ , entonces

$$u \circ f = P(\chi_{f^{-1}(E)}) = P(\chi_E) = u.$$

Por tanto, usando (1.3),

$$u(z) = u(f(z)) = \cdots = u(f^n(z)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u(0),$$

es decir,  $u = \text{cte}$ . Se sigue que ó bien  $E \stackrel{\circ}{=} \emptyset$ , ó bien  $E \stackrel{\circ}{=} \partial\Delta$ . ■

En cuanto a la mezcla, de hecho, se verifica un resultado más fuerte de mezcla uniforme,

**Proposición 1.5** (Pommerenke [P2]). *Si  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  es interna con  $f(0) = 0$ , pero no una rotación, entonces existe una constante absoluta  $K$  tal que*

$$\left| \frac{L(I \cap f^{-n}(A))}{L(A)} - L(I) \right| \leq K e^{-(1-a)n/84},$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ , y para todos los arcos  $I \subseteq \partial\Delta$ , y todos los borelianos  $A \subseteq \partial\Delta$  con  $L(A) > 0$ , y donde  $a = \max\{1/2, |f'(0)|\}$ .

Como consecuencia, se tiene que  $f$  tiene entropía positiva. Concretamente,

$$h(f) \geq c(1 - |f'(0)|).$$

Por último, en cuanto a la exactitud (que, en particular, prueba la mezcla y la ergodicidad),

**Proposición 1.6** (Exactitud). *Si  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  es interna pero no una rotación y  $f(0) = 0$ , entonces  $f$  es exacta.*

En efecto, si  $A \stackrel{\circ}{=} f^{-n}(E_n)$  con  $E_n \in \mathcal{B}(\partial\Delta)$ , entonces es fácil ver, como en la prueba del lema de Löwner, que

$$P(\chi_A) = P(\chi_{E_n}) \circ f^n.$$

Ahora, como por el lema de Schwarz,  $f^n(z) \rightarrow 0$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , uniformemente en  $\{|z| = r\}$ , y como  $L(A) = L(E_n)$  para todo  $n$ , por el lema de Löwner, tenemos que

$$P(\chi_A)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{E_n} \frac{1 - |f^n(z)|^2}{|e^{i\theta} - f^n(z)|^2} d\theta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L(A).$$

Por tanto,  $P(\chi_A)$  es constante, de donde, ó bien  $P(\chi_A) \equiv 0$ , ó bien  $P(\chi_A) \equiv 1/(2\pi)$ . Es decir,  $L(A) = 0$  ó  $L(A) = 1$ . ■

Una función interna en la bola unidad de  $\mathbb{C}^n$  es una función holomorfa  $f : \mathbb{B}_n \rightarrow \Delta$ , donde  $\mathbb{B}_n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$  tal que  $\lim_{r \rightarrow 1} |f(r\xi)| = 1$ , en casi todo punto  $\xi \in \mathbb{S}_n = \partial\mathbb{B}_n$  con respecto a la medida de Lebesgue en  $\mathbb{S}_n$ .

Recordemos que si  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ , entonces  $|z|^2 = \sum_j |z_j|^2$ .

Hasta 1.981 se pensaba que no había tales funciones (ver [R3]) pero en ese año A. B. Aleksandrov [AL] y poco después E. Løw [Lø] fueron capaces de construirlas.



Sin embargo ambas construcciones son complicadas, lo que hace difícil manejar ejemplos concretos de tales funciones.

Si  $f : \mathbb{B}_n \rightarrow \Delta$  es interna y  $f(0) = 0$ , es sencillo comprobar, adaptando trivialmente la prueba de lema de Löwner, que  $f$  “preserva” la medida de Lebesgue

**Proposición 1.7** (Lema de Löwner para  $\mathbb{B}_n$ ). *Sea  $f : \mathbb{B}_n \rightarrow \Delta$  una función interna con  $f(0) = 0$ . Si  $E \subseteq \partial\Delta$  es un boreliano, entonces*

$$\sigma(f^{-1}(E)) = L(E),$$

donde  $\sigma$  y  $L$  denotan, respectivamente, las medidas de Lebesgue normalizadas en  $\mathbb{S}_n = \partial\mathbb{B}_n$  y en  $\partial\Delta$ .

### 1.3. Funciones univalentes. Lema de Löwner.

Una función holomorfa  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  se dice *univalente* si es inyectiva. El comportamiento frontera de estas funciones es, en cierto modo, opuesto al de las funciones internas pues, como veremos, las funciones internas aumentan el tamaño de las antiimágenes, mientras que las univalentes hacen crecer a las imágenes.

La razón heurística de tal diferencia puede encontrarse en el hecho de que si  $f$  es univalente  $|f'(\xi)| \geq 1$ , si  $\xi \in \partial\Delta$ , mientras que si  $f$  es interna para casi todos los  $w \in \Delta$  (excepto en un conjunto de capacidad logarítmica nula)

$$\sum_{f(a_n)=w} \frac{1}{|f'(a_n)|} \geq 1,$$

lo que, grosso modo, nos dice que  $|(f^{-1})'(w)| \geq 1$ .

La siguiente, es la “versión” del lema de Löwner para funciones univalentes.

**Proposición 1.8** (Lema de Löwner [A2, p. 12]) *Si  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  es univalente con  $f(0) = 0$ , y si  $E \subseteq \partial\Delta$  es un boreliano con límites radiales  $f(E) \subseteq \partial\Delta$ , entonces*

$$L(f(E)) \geq L(E).$$

Además nunca hay desigualdad en sentido contrario, y en cuanto a la igualdad, si  $L(E) > 0$ , ésta sólo puede darse si  $f$  es una rotación.

## 1.4. Contenidos.

Puesto que el lema de Löwner dice poca cosa cuando  $L(E) = 0$ , necesitamos una forma de medir el tamaño de los conjuntos que discrimine entre conjuntos de medida cero. Esto nos conducirá al estudio de las dimensiones fraccionarias que pueden calcularse usando contenidos o capacidades de Riesz cuyas definiciones y propiedades abordaremos en la presente y próxima secciones, respectivamente.

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Dados  $x \in X$ ,  $r > 0$ , denotaremos la bola con centro  $x$  y radio  $r$  por  $B_d(x, r)$ .

Sean ahora  $A \subseteq X$ ,  $\delta > 0$ . Llamaremos un  $\delta$ -cubrimiento de  $A$ , a una familia  $\{B_d(x_i, r_i)\}_{i=1}^{\infty}$  de bolas en  $X$  que cubren  $A$ , (es decir,  $A \subseteq \cup_i B_d(x_i, r_i)$ ), tal que  $r_i \leq \delta$  para todos los radios  $r_i$ . Definimos también, dado  $\alpha > 0$ ,

$$H_{\alpha, \delta}(A) = \inf \left\{ \sum_i r_i^\alpha : \{B_d(x_i, r_i)\} \text{ es un } \delta\text{-cubrimiento de } A \right\}.$$

Es claro que si  $\delta_1 \leq \delta_2$ , entonces  $H_{\alpha, \delta_1}(A) \geq H_{\alpha, \delta_2}(A)$ . Esto da sentido a la siguiente definición.

La *medida de Hausdorff  $\alpha$ -dimensional* de  $A$ , es

$$H_\alpha(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_{\alpha, \delta}(A).$$

Observemos que puede ocurrir que  $H_\alpha(A) = +\infty$ .  $H_\alpha$  resulta ser una medida (positiva) en una cierta  $\sigma$ -álgebra en  $X$ , si la distancia  $d$  verifica ciertas propiedades de separación (ver, por ejemplo, [Ro]). Si  $X = \mathbb{R}^n$  estas propiedades se verifican y los borelianos resultan ser medibles.

Puesto que  $\delta \rightarrow 0$ , los cubrimientos extremales corresponden a radios pequeños, lo que nos dice que

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \implies H_{\alpha_1}(A) \geq H_{\alpha_2}(A),$$

esto es,  $H_\alpha(A)$  es una función decreciente en  $\alpha$ .

La *dimensión de Hausdorff* de  $A$ , se define como

$$\text{Dim}(A) = \sup \{ \alpha : H_\alpha(A) > 0 \} = \inf \{ \alpha : H_\alpha(A) = 0 \}.$$

De hecho (ver, por ejemplo, [KS]) se tiene que

$$H_\alpha(A) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } \alpha < \text{Dim}(A), \\ 0, & \text{si } \alpha > \text{Dim}(A), \end{cases}$$

por lo que si  $0 < H_\beta(A) < +\infty$ , entonces  $\text{Dim}(A) = \beta$ . El recíproco de esta afirmación es falso (ver los ejemplos que siguen).

## EJEMPLOS:

1) Si  $X = \mathbb{R}^n$ , es claro que  $H_n$  es un múltiplo de la medida de Lebesgue. Se deduce que todo conjunto en  $\mathbb{R}^n$  de medida positiva y finita tiene dimensión de Hausdorff igual a  $n$ .

2) Puesto que toda bola en  $\mathbb{R}^n$  tiene medida positiva y finita, tiene dimensión de Hausdorff  $n$ . Por tanto, toda bola tiene medida de Hausdorff  $(n + \varepsilon)$ -dimensional nula, cualquiera que sea  $\varepsilon > 0$ . Puesto que  $H_\alpha$  es una medida, se sigue que todo boreliano de  $\mathbb{R}^n$ , incluyendo al propio  $\mathbb{R}^n$ , tiene medida de Hausdorff  $(n + \varepsilon)$ -dimensional nula, y por tanto, la dimensión de Hausdorff de cualquier subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  de medida de Lebesgue positiva (aunque sea infinita) es  $n$ .

3) En cambio, los subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  de medida de Lebesgue nula pueden tener cualquier dimensión entre 0 y  $n$ . Por ejemplo, cualquier conjunto numerable  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  tiene dimensión cero, pues  $\{B(a_n, R/2^n)\}$  es un  $\delta$ -cubrimiento de  $\{a_n\}$ , cualquiera que sea  $R < \delta$ , de donde  $H_{\alpha, \delta}(\{a_n\}) = 0$ , para todos  $\alpha, \delta > 0$ . Sin embargo, también hay subconjuntos de medida de Lebesgue nula y dimensión  $n$ . De hecho, se puede construir un conjunto de Cantor (para cada  $0 \leq \alpha \leq n$ ) tal que  $\text{Dim}(A) = \alpha$ .

La medida de Hausdorff tiene el inconveniente de que, en ocasiones, es difícil de manejar porque en muchas ocasiones es infinito. Una forma alternativa de hallar dimensiones de Hausdorff la proporciona el  $\alpha$ -contenido.

Si  $A \subseteq X$ , el  $\alpha$ -contenido de  $A$ , se define como

$$M_\alpha(A) = \inf \left\{ \sum_i r_i^\alpha : \{B_d(x_i, r_i)\} \text{ cubrimiento de } A \right\}.$$

Es claro que

$$M_\alpha(A) = 0 \iff H_\alpha(A) = 0,$$

por lo que

$$\text{Dim}(A) = \inf \{ \alpha : M_\alpha = 0 \} = \sup \{ \alpha : M_\alpha > 0 \}.$$

Sin embargo,  $M_\alpha$  tiene la gran ventaja de ser finita sobre conjuntos acotados y el inconveniente de que no es una medida. Ahora bien, si  $M_\alpha(A) > 0$ , entonces ([T], [Fa]) existe una medida  $\mu$  positiva tal que:

- i)  $M_\alpha(A) = \|\mu\|$ , (la masa total de  $\mu$ )
- ii)  $\mu(B_d(x, R)) \leq C_\alpha R^\alpha$ , para toda bola  $B_d(x, R)$ .

Esto suele facilitar el cálculo de dimensiones de Hausdorff.

## 1.5. Capacidades.

Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico. Una *capacidad* en  $X$  es una función de conjunto  $f$  no negativa que cumple

- 1)  $f(E) = \sup \{f(F) : F \subseteq E, F \text{ compacto}\},$
- 2)  $f(E_1) \leq f(E_2),$  si  $E_1 \subseteq E_2,$
- 3)  $f^*(E) = \lim_{j \rightarrow \infty} f^*(E_j),$  si  $E_j \nearrow E,$

donde  $f^*$  es la función de conjunto (llamada *capacidad exterior*) definida por

$$f^*(E) = \inf \{f(O) : E \subseteq O, O \text{ abierto}\}.$$

Un conjunto se dice *capacitable* si  $f(E) = f^*(E).$

Nosotros estamos interesados en las capacidades de Riesz y logarítmica, puesto que las primeras nos permitirán calcular dimensiones de Hausdorff y la segunda es un invariante conforme por transformaciones conformes normalizadas en infinito (ver la Sección 1.8).

Si  $\mu$  es una medida con signo en  $\mathbb{R}^N$  ( $0 \leq \alpha < N$ ), la  $\alpha$ -energía de  $\mu$  se define como

$$I_\alpha(\mu) = \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \Phi_\alpha(|x - y|) d\mu(x) d\mu(y),$$

donde

$$\Phi_\alpha(t) = \begin{cases} \log \frac{1}{t}, & \text{si } \alpha = 0, \\ \frac{1}{t^\alpha}, & \text{si } 0 < \alpha < N. \end{cases}$$

Si  $E$  es un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^N$ , entonces la  $\alpha$ -capacidad (de Riesz) de  $E$  es

$$(1.4) \quad \frac{1}{\text{cap}_\alpha(E)} = \inf \{I_\alpha(\mu) : \mu \text{ probabilidad soportada en } E\}$$

si  $0 < \alpha < N$ , y la capacidad logarítmica de  $E$  se define como

$$(1.5) \quad \log \frac{1}{\text{cap}_0(E)} = \inf \{I_0(\mu) : \mu \text{ probabilidad soportada en } E\}.$$

### OBSERVACIONES:

1) Si  $\alpha = N - 2$  ( $N > 2$ ), la capacidad de Riesz es la capacidad newtoniana. La energía newtoniana es la que aparece asociada en la Física a los potenciales gravitatorios o de Coulomb. Su análogo en dimensión dos es la capacidad logarítmica.

2) Si  $\alpha = 0$ , la capacidad logarítmica se define de forma diferente con dos objetivos: que sea positiva y que coincida con el diámetro transfinito y con  $e^{-\gamma}$  donde  $\gamma$  es la constante de Robin de  $E$  (ver las secciones 1.6 y 1.8).

3) Si  $I_\alpha(\mu) = +\infty$ , para toda probabilidad  $\mu$  soportada en  $E$ , diremos que  $\text{cap}_\alpha(E) = 0$ .

El ínfimo en (1.4) y (1.5), si es mayor que cero, se alcanza para una única medida de probabilidad  $\mu_e$  que llamaremos la  $\alpha$ -distribución de equilibrio de  $E$ .

Para probarlo y con el objetivo adicional de caracterizar la  $\alpha$ -capacidad de  $E$  cuando  $E$  no es compacto, necesitamos recordar algunos hechos sobre convergencia de medidas. En cualquier caso, las referencias básicas sobre este tópico son [C], [KS] y [L], especialmente esta última, aunque allí los resultados que necesitamos están bastante dispersos. Por tanto, en lo que sigue, vamos a darles una redacción unificada y con cierto detalle.

Diremos que una sucesión de medidas con signo,  $\{\sigma_n\}$ , con soportes contenidos en un conjunto compacto  $K$ , converge  $w^*$  a una medida con signo  $\sigma$ , si

$$\int h(x) d\sigma_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int h(x) d\sigma(x),$$

para toda  $h \in C(K)$ , el espacio de las funciones continuas en  $K$ . Aquí, la convergencia  $w^*$  hace referencia a la dualidad entre el espacio de medidas con signo con soporte en  $K$ , y el espacio  $C(K)$ .

Denotaremos por  $\mathcal{M}_\alpha(K)$  el espacio de todas las medidas con signo con soporte contenido en  $K$  y cuya  $\alpha$ -energía es finita.  $\mathcal{M}_\alpha$  denotará el mismo espacio sin restricción sobre el soporte de la medida, y  $\mathcal{M}_\alpha^+$  el espacio correspondiente de medidas positivas.

**Lema 1.1.** Si  $\{\sigma_n\} \subset \mathcal{M}_\alpha^+$  ( $0 \leq \alpha < N$ ), y  $\sigma_n \xrightarrow{w^*} \sigma$ , entonces  $\sigma \in \mathcal{M}_\alpha^+$ , y

$$I_\alpha(\sigma) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I_\alpha(\sigma_n).$$

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $\Phi_{\alpha,\rho}(t)$  el núcleo “truncado”

$$\Phi_{\alpha,\rho}(t) = \begin{cases} \Phi_\alpha(t), & \text{si } \Phi_\alpha(t) \leq \rho, \\ \rho, & \text{si } \Phi_\alpha(t) \geq \rho. \end{cases}$$

Entonces, para todo  $\rho > 0$ ,

$$\begin{aligned} \iint \Phi_{\alpha,\rho}(|x-y|) d\sigma(x) d\sigma(y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint \Phi_{\alpha,\rho}(|x-y|) d\sigma_n(x) d\sigma_n(y) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I_\alpha(\sigma_n). \end{aligned}$$

El lema se sigue ahora del teorema de la convergencia monótona (cuando  $\rho \rightarrow \infty$ ).  $\square$

**Lema 1.2** ([L, p. 79]). Si  $0 < \alpha < N$ , y  $\sigma \in \mathcal{M}_\alpha$ , entonces  $I_\alpha(\sigma) \geq 0$ . Además

$$I_\alpha(\sigma) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \sigma \equiv 0.$$

**Lemma 1.3** ([L, p. 80]). Si  $\sigma \in \mathcal{M}_0$  y el soporte de  $\sigma$  está contenido en un disco abierto de radio 1, entonces  $I_0(\sigma) \geq 0$ , y

$$I_0(\sigma) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \sigma \equiv 0.$$

Estos dos lemas nos permiten definir un producto escalar en  $\mathcal{M}_\alpha$  (para  $0 < \alpha < N$ ) y, por ejemplo, en  $\mathcal{M}_0(\{|x| \leq 1/2\})$  (para  $\alpha = 0$ ) como sigue

$$\langle \sigma, \gamma \rangle = \iint \Phi_\alpha(|x - y|) d\sigma(x) d\gamma(y).$$

Observemos que la norma asociada verifica (no confundir  $\|\sigma\|$  con  $\sigma(\mathbb{R}^N)$ ).

$$\|\sigma\|^2 = I_\alpha(\sigma).$$

**Lema 1.4.** Si  $0 < \alpha < N$ ,  $\{\sigma_n\} \subset \mathcal{M}_\alpha^+(K)$ ,  $\sigma_n \xrightarrow{w^*} \sigma$ , y  $\|\sigma_n\| < M$ , entonces  $\sigma \in \mathcal{M}_\alpha^+(\partial\Delta)$  y  $\sigma_n \xrightarrow{w} \sigma$  en sentido débil con respecto al producto escalar.

El resultado también es cierto si reemplazamos  $\mathcal{M}_\alpha^+(\partial\Delta)$  por  $\mathcal{M}_0^+(\{|x| \leq 1/2\})$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Por el Lema 1.1, tenemos que  $\sigma \in \mathcal{M}_\alpha^+(K)$ , en el caso  $0 < \alpha < N$ , y  $\sigma \in \mathcal{M}_0^+(\{|z| \leq 1/2\})$ , en el caso  $\alpha = 0$ . Además,

$$\|\sigma\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\sigma_n\|.$$

Por otro lado, si  $\gamma$  es una medida con signo cuyo potencial

$$U_\alpha^\gamma(x) = \int \Phi_\alpha(|x - y|) d\gamma(y)$$

es una función continua, entonces

$$\langle \sigma_n, \gamma \rangle = \int U_\alpha^\gamma(x) d\sigma_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int U_\alpha^\gamma(x) d\sigma(x) = \langle \sigma, \gamma \rangle.$$

Esto demuestra el lema, puesto que tales medidas son densas en  $\mathcal{M}_\alpha(K)$  ( $0 < \alpha < N$ ) ([L, p. 82]) y en  $\mathcal{M}_0(\{|x| \leq 1/2\})$  ([L, p. 83]). ■

**Lema 1.5.** Si  $0 < \alpha < N$ ,  $\{\sigma_n\}$  es una sucesión de Cauchy (con respecto al producto escalar) en  $\mathcal{M}_\alpha^+(K)$ , y  $\sigma_n \xrightarrow{w^*} \sigma$ , entonces  $\sigma_n \rightarrow \sigma$  en la norma, i.e.

$$\|\sigma_n - \sigma\| \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

El lema sigue siendo válido si reemplazamos  $\mathcal{M}_\alpha^+(K)$  por  $\mathcal{M}_0^+(\{|x| \leq 1/2\})$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Puesto que  $\{\sigma_n\}$  es una sucesión de Cauchy,  $\{\|\sigma_n\|\}$  es un conjunto acotado y, por tanto, el Lema 1.4 implica que  $\sigma \in \mathcal{M}_\alpha^+(K)$ , y

$$\|\sigma - \sigma_n\|^2 = \langle \sigma - \sigma_n, \sigma - \sigma_n \rangle = \lim_{p \rightarrow \infty} \langle \sigma - \sigma_n, \sigma_p - \sigma_n \rangle.$$

Por tanto, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\|\sigma - \sigma_n\|^2 \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \|\sigma - \sigma_n\| \|\sigma_p - \sigma_n\|,$$

esto es,

$$\|\sigma - \sigma_n\| \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \|\sigma_p - \sigma_n\|.$$

Ahora estamos en condiciones de probar la existencia de una medida que minimiza (1.4) (y (1.5)), en el caso en que  $E$  es compacto.

En efecto, sea  $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ , con  $\mu_n$  probabilidades soportadas en  $E$ , una sucesión minimizante, i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_\alpha(\mu) = W_\alpha(E),$$

donde  $W_\alpha(E)$  denota el ínfimo que aparece en (1.4) y (1.5). Como  $\mu_n(E) = 1$ , para todo  $n$ , por el teorema de Banach-Alaoglu, podemos suponer que  $\mu_n \xrightarrow{w^*} \mu_e$ , donde  $\mu_e$  es una cierta medida con soporte en  $E$ . Es fácil ver que, además,  $\mu_e$  es una probabilidad en  $E$ . Además, por el Lema 1.1,

$$I_\alpha(\mu_e) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I_\alpha(\mu_n) = W_\alpha(E).$$

Por tanto,  $I_\alpha(\mu_e) = W_\alpha(E)$ . La unicidad de  $\mu_e$  se sigue del siguiente:

**Lema 1.6.** Si  $0 < \alpha < N$ , entonces para toda probabilidad  $\sigma$  soportada en  $E$ , subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^N$ ,

$$\|\sigma - \mu_e\|^2 \leq \|\sigma\|^2 - \|\mu_e\|^2.$$

El lema sigue siendo válido para el caso  $\alpha = 0$  si  $E$  es un subconjunto compacto de  $\{|x| \leq 1/2\}$ .

DEMOSTRACIÓN. Consideremos para  $t \in [0, 1]$  las probabilidades soportadas en  $E$  dadas por

$$\sigma_t = (1 - t)\mu_e + t\sigma.$$

Como  $\sigma_t = \mu_e + t(\sigma - \mu_e)$ , tenemos que

$$\|\mu_e\|^2 \leq \|\sigma_t\|^2 = \|\mu_e\|^2 + 2t\langle\mu_e, \sigma - \mu_e\rangle + t^2\|\sigma - \mu_e\|^2.$$

Por tanto,  $2\langle\mu_e, \sigma - \mu_e\rangle + t\|\sigma - \mu_e\|^2 \geq 0$ , si  $t \in (0, 1]$ . Haciendo  $t \rightarrow 0$ , obtenemos que  $\langle\mu_e, \sigma - \mu_e\rangle \geq 0$ , esto es,

$$\langle\mu_e, \sigma\rangle \geq \|\mu_e\|^2.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \|\sigma - \mu_e\|^2 &= \|\sigma\|^2 - 2\langle\sigma, \mu_e\rangle + \|\mu_e\|^2 \\ &\leq \|\sigma\|^2 - 2\|\mu_e\|^2 + \|\mu_e\|^2 = \|\sigma\|^2 - \|\mu_e\|^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Corolario.** Si  $E$  es compacto, la medida  $\mu_e$  que minimiza la integral de energía, es única.

DEMOSTRACIÓN. En el caso  $0 < \alpha < N$ , esto es claro por el Lema 1.6. En el caso  $\alpha = 0$ , la unicidad de  $\mu_e$  se ve del siguiente modo: Si  $E \subseteq \{|x| \leq R\}$  y si  $\nu$  es una probabilidad con soporte en  $E$ , entonces la probabilidad  $\nu^*$  definida por

$$(1.6) \quad \nu^*(A) = \nu(2RA),$$

para todo  $A$  boreliano de  $\{|x| \leq 1/2\}$  está soportada en  $\frac{1}{2R}E = \{x/(2R) : x \in E\}$ . Por el Lema 1.6,  $\frac{1}{2R}E \subseteq \{|z| \leq 1/2\}$  tiene una única medida de equilibrio que denotaremos  $\mu_e^*$ . La probabilidad  $\mu_e$ , definida por medio de (1.6) a partir de  $\mu_e^*$ , está soportada en  $E$  y es la única medida minimizante, pues es claro que

$$I_0(\mu_e) = I_0(\mu_e^*) - \log(2R). \quad \blacksquare$$

En orden a obtener una capacidad necesitamos extender la definición a subconjuntos arbitrarios de  $\mathbb{R}^N$ . Si  $E \subseteq \mathbb{R}^N$  ( $0 \leq \alpha < N$ ), definimos

$$\text{cap}_\alpha(E) = \sup \{\text{cap}_\alpha(K) : K \subseteq E, K \text{ compacto}\}.$$

Es un teorema clásico de Choquet [L, p. 144] que todos los conjuntos de Borel (de hecho todos los conjuntos analíticos) son capacitables, es decir, si  $E$  es un boreliano

$$\text{cap}_\alpha(E) = \inf \{\text{cap}_\alpha(O) : E \subseteq O, O \text{ abierto}\}.$$

En el Capítulo 3 necesitaremos una caracterización de la  $\alpha$ -capacidad de cualquier boreliano de  $\partial\Delta$  en términos de la  $\alpha$ -energía. De hecho, estamos ahora en condiciones de dar tal caracterización para cualquier boreliano acotado de  $\mathbb{R}^N$ .



**Lema 1.7.** Si  $0 < \alpha < N$  y si  $E$  es un subconjunto de Borel acotado en  $\mathbb{R}^N$ ,

$$(1.7) \quad \frac{1}{\text{cap}_\alpha(E)} = \inf \{ I_\alpha(\mu) : \mu \text{ probabilidad, } \mu(E) = 1 \},$$

y existe una probabilidad  $\mu_e$  soportada en  $\overline{E}$  tal que

$$(1.8) \quad \frac{1}{\text{cap}_\alpha(E)} = I_\alpha(\mu_e).$$

**DEMOSTRACIÓN.** Si  $\text{cap}_\alpha(E) = 0$  es fácil verificar que ambos miembros de (1.7) son simultáneamente infinito. Supongamos, pues, que  $\text{cap}_\alpha(E) > 0$ , y sea  $\mu$  una probabilidad con  $\mu(E) = 1$  y  $\alpha$ -energía finita. Sea  $K_n \subset E$  una sucesión de conjuntos compactos tales que  $\mu(K_n) \nearrow 1$ . Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{cap}_\alpha(E)} &\leq \frac{1}{\text{cap}_\alpha(K_n)} \leq I_\alpha\left(\frac{\mu|_{K_n}}{\mu(K_n)}\right) \\ &= \frac{1}{(\mu(K_n))^2} \iint_{K_n \times K_n} \Phi_\alpha(|x - y|) d\mu(x) d\mu(y). \end{aligned}$$

Haciendo  $n \rightarrow \infty$ , el teorema de la convergencia monótona nos da que

$$\frac{1}{\text{cap}_\alpha(E)} \leq I_\alpha(\mu)$$

y, por tanto,

$$\frac{1}{\text{cap}_\alpha(E)} \leq \inf \{ I_\alpha(\mu) : \mu \text{ probabilidad, } \mu(E) = 1 \}.$$

Para probar la desigualdad opuesta, elijamos una sucesión creciente  $K_n \subset E$  de conjuntos compactos tales que  $\text{cap}_\alpha(K_n) \rightarrow \text{cap}_\alpha(E)$ . Entonces, si  $\mu_n$  denota la distribución de equilibrio de  $K_n$ ,

$$I_\alpha(\mu_n) = \frac{1}{\text{cap}_\alpha(K_n)} \searrow \frac{1}{\text{cap}_\alpha(E)}.$$

Esto prueba (1.7). Además, salvo por tener que extraer una subsucesión, podemos suponer que

$$\mu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w^*} \mu_e,$$

donde  $\mu_e$  es una medida de probabilidad soportada en  $\overline{E}$ . Por el Lema 1.1, esta medida cumple que

$$(1.9) \quad I_\alpha(\mu_e) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I_\alpha(\mu_n) = \frac{1}{\text{cap}_\alpha(E)}.$$

Para terminar, sólo necesitamos verificar que  $\mu_e$  es la medida que aparece en (1.8) probando que, de hecho, tenemos igualdad en (1.9). Puesto que

$$|I_\alpha(\mu_e) - I_\alpha(\mu_n)| = |\|\mu_e\|^2 - \|\mu_n\|^2|$$

y

$$|\|\mu_e\| - \|\mu_n\|| \leq \|\mu_e - \mu_n\|,$$

en virtud del Lema 1.5, sólo necesitamos mostrar que  $\{\mu_n\}$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathcal{M}_\alpha^+(\overline{E})$ . Pero si  $n, p \in \mathbb{N}$ , y si  $n \geq p$ , como  $K_p \subset K_n$ , tenemos que  $\mu_p$  es una probabilidad soportada sobre  $K_n$  y por tanto, el Lema 1.6 y (1.9) nos dan que

$$\|\mu_p - \mu_n\|^2 \leq \|\mu_p\|^2 - \|\mu_n\|^2 = I_\alpha(\mu_p) - I_\alpha(\mu_n) \xrightarrow{p, n \rightarrow \infty} 0. \quad \blacksquare$$

Para el caso  $\alpha = 0$  tenemos

**Lemma 1.8.** *Si  $E$  es un subconjunto de Borel acotado de  $\mathbb{R}^N$ , entonces*

$$(1.10) \quad \log \frac{1}{\text{cap}_0(E)} = \inf \{I_0(\mu) : \mu \text{ probabilidad, } \mu(E) = 1\}.$$

*Además, existe una medida de probabilidad  $\mu_e$  soportada en  $\overline{E}$  tal que*

$$(1.11) \quad \log \frac{1}{\text{cap}_0(E)} = I_0(\mu_e).$$

**DEMOSTRACIÓN.** Sigue las mismas líneas que la del Lema 1.7 hasta los pasos finales. Para probar (1.11) necesitamos algunas modificaciones similares a las que hicimos en el caso en que  $E$  es compacto.

Si  $\lambda > 0$ , y si  $A \subset \mathbb{R}^N$ , denotaremos por  $\lambda A$  el conjunto  $\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}$ .

Supongamos que  $E \subseteq \{x : |x| \leq R\}$ . Entonces  $\frac{1}{2R}E$  es un subconjunto de Borel de  $\{|x| \leq 1/2\}$ . Ahora, tomemos una sucesión creciente de compactos  $K_n^* \subset \frac{1}{2R}E$  tales que  $\text{cap}_0(K_n^*) \rightarrow \text{cap}_0(\frac{1}{2R}E)$ . Sea  $\mu_n^*$  la medida de equilibrio de  $K_n^*$ . Las probabilidades  $\mu_n$  definidas por

$$(1.12) \quad \mu_n(A) = \mu_n^*\left(\frac{1}{2R}A\right),$$

para  $A$  boreliano en  $\{|x| \leq R\}$ , están soportadas en  $\overline{E}$ . Además, es claro que

$$(1.13) \quad I_0(\mu_n^*) = I_0(\mu_n) + \log(2R).$$

Por otro lado, como en la demostración del Lema 1.7,  $\mu_n^* \xrightarrow{w^*} \mu_e^*$ , donde  $\mu_e^*$  es una medida de probabilidad soportada en  $\frac{1}{2R}E$ , y

$$(1.14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I_0(\mu_n^*) = I_0(\mu_e^*).$$

Como  $\mu_n \xrightarrow{w^*} \mu_e$ , donde  $\mu_e$  es la medida de probabilidad soportada en  $\overline{E}$  y definida a partir de  $\mu_e^*$  por medio de (1.12), concluimos de (1.13) y (1.14) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_0(\mu_n) = I_0(\mu_e). \quad \blacksquare$$

OBSERVACIÓN. Las medidas  $\mu_e$  de los dos lemas anteriores son únicas, por el Lema 1.6 y su corolario.

## 1.6. Diámetro transfinito.

La conexión entre la capacidad  $\text{cap}_\alpha(E)$  y las propiedades métricas de  $E$  queda de manifiesto por su coincidencia con el  $\alpha$ -diámetro transfinito.

La construcción del  $\alpha$ -diámetro transfinito es como sigue. Dado  $n \in \mathbb{N}$ , sean  $x_1, \dots, x_n$ ,  $n$  puntos arbitrarios de  $E$ , subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^N$ . La función

$$\frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{i < j} \frac{1}{|x_i - x_j|^\alpha}, \quad 0 < \alpha < N,$$

alcanza su valor mínimo en  $E$ , en ciertos puntos  $\xi_i^{(n, \alpha)}$  que llamaremos los  $\alpha$ -puntos de Fekete de  $E$  de orden  $n$ . Llamemos

$$D_n^{(\alpha)}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \binom{n}{2} \frac{1}{\sum_{i < j} \frac{1}{|\xi_i^{(n, \alpha)} - \xi_j^{(n, \alpha)}|^\alpha}}.$$

No es difícil comprobar que  $D_{n-1}^{(\alpha)}(E) \geq D_n^{(\alpha)}(E)$  ([L, p. 160]), por lo que existe el límite

$$D^{(\alpha)}(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n^{(\alpha)}(E) \geq 0$$

que llamaremos el  $\alpha$ -diámetro transfinito de  $E$ . Las cantidades  $D_n^{(\alpha)}(E)$  se llamarán los  $(n, \alpha)$ -diámetros de  $E$ .

En el caso  $\alpha = 0$ , el diámetro transfinito se obtiene de forma similar: para cada  $n \in \mathbb{N}$  la función

$$(1.15) \quad \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{i < j} \log \frac{1}{|x_i - x_j|}$$

alcanza su mínimo en  $E$  en ciertos puntos  $\xi_i^{(n)}$  llamados los puntos de Fekete de  $E$  de orden  $n$ . Si denotamos por  $\log 1/D_n(E)$  el valor mínimo de (1.15) sobre  $E$ , entonces

$$D_n(E) = \left( \prod_{i < j} |\xi_i^{(n)} - \xi_j^{(n)}| \right)^{2/(n(n-1))}.$$

Como antes, es fácil comprobar que  $D_{n+1}(E) \leq D_n(E)$ , y por tanto, existe el límite

$$D(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n(E),$$

que llamaremos el *diámetro transfinito* de  $E$ . Nos referiremos a las cantidades  $D_n(E)$  como los *n-diámetros* de  $E$ . Pues bien, se tiene

**Teorema** [L, p. 161, 169]. *Si  $E$  es un compacto en  $\mathbb{R}^N$ ,*

1) *Si  $0 < \alpha < N$ , entonces*

$$D^{(\alpha)}(E) = \text{cap}_\alpha(E).$$

2) *Si  $\alpha = 0$ , entonces*

$$D(E) = \text{cap}_0(E).$$

**OBSERVACIÓN.** Si  $N = 3$ ,  $\alpha = 1$ , las cantidades  $D_n^{(1)}(E)$  tienen una interpretación física sencilla. Consideremos en  $E$  una distribución de  $n$  cargas puntuales de carga  $1/n$ ; entonces, la energía potencial de tal sistema de cargas es mínima cuando las cargas están localizadas en los puntos de Fekete  $\xi_i^{(n,1)}$ .

## 1.7. Capacidad, contenido y dimensión de Hausdorff.

Comparando normas  $\ell_p$  en el espacio de sucesiones  $\{a_j\}_{j=1}^N$  con la norma  $(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |a_j|^\alpha)^{1/\alpha}$ , tenemos (por la desigualdad de Hölder) que si  $\alpha_1 \leq \alpha_2$ , entonces  $\|\cdot\|_{\alpha_1} \leq \|\cdot\|_{\alpha_2}$ , es decir

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{i < j} \frac{1}{|\xi_i^{(n, \alpha_1)} - \xi_j^{(n, \alpha_1)}|^{\alpha_1}} \right)^{1/\alpha_1} &\leq \left( \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{i < j} \frac{1}{|\xi_i^{(n, \alpha_2)} - \xi_j^{(n, \alpha_2)}|^{\alpha_1}} \right)^{1/\alpha_1} \\ &\leq \left( \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{i < j} \frac{1}{|\xi_i^{(n, \alpha_2)} - \xi_j^{(n, \alpha_2)}|^{\alpha_2}} \right)^{1/\alpha_2}, \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se sigue de la definición de los  $\alpha_1$ -puntos de Fekete de orden  $n$ . Por tanto,

$$(D_n^{(\alpha_1)}(E))^{1/\alpha_1} \geq (D_n^{(\alpha_2)}(E))^{1/\alpha_2}, \quad \text{si } 0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 < N,$$

y pasando al límite cuando  $n \rightarrow \infty$ ,

$$(1.16) \quad (\text{cap}_{\alpha_1}(E))^{1/\alpha_1} \geq (\text{cap}_{\alpha_2}(E))^{1/\alpha_2}, \quad \text{si } 0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 < N.$$

Para relacionar las capacidades de Riesz con la capacidad logarítmica, usemos la desigualdad de Jensen otra vez en el espacio de sucesiones  $\{a_j\}_{j=1}^N$  con la misma

norma que antes. Obtenemos, usando la función convexa  $\Psi(t) = \log(1/t)^{1/\alpha}$ , que si  $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{i < j} \log \frac{1}{|\xi_i^{(n)} - \xi_j^{(n)}|}\right) &\leq \exp\left(\frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{i < j} \log \frac{1}{|\xi_i^{(n,\alpha)} - \xi_j^{(n,\alpha)}|}\right) \\ &\leq \left(\frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{i < j} \frac{1}{|\xi_i^{(n,\alpha)} - \xi_j^{(n,\alpha)}|^\alpha}\right)^{1/\alpha}, \end{aligned}$$

donde, en la primera desigualdad, hemos usado que los puntos de Fekete de orden  $n$ ,  $\xi_i^{(n)}$ , minimizan (1.15). Por tanto,

$$\exp\left(\log \frac{1}{D_n(E)}\right) \leq (D_n^{(\alpha)}(E))^{-1/\alpha},$$

o equivalentemente,

$$D_n(E) \geq (D_n^{(\alpha)}(E))^{1/\alpha}, \quad \text{si } 0 < \alpha < N.$$

Pasando al límite cuando  $n \rightarrow \infty$ , y en vista del Teorema de la sección anterior, vemos que

$$(1.17) \quad \text{cap}_0(E) \geq (\text{cap}_\alpha(E))^{1/\alpha}, \quad \text{si } 0 < \alpha < N.$$

Hemos obtenido (1.16) y (1.17) si  $E$  es compacto, de donde, tomando supremos en todos los compactos contenidos en  $E$ , (1.16) y (1.17) son válidas para todo boreliano de  $\mathbb{R}^N$ .

Observemos ahora que, fijado  $E$ , por (1.16),  $(\text{cap}_\alpha(E))^{1/\alpha}$  es una función monótona decreciente en  $\alpha$ , por lo que tiene sentido definir la *dimensión capacitaria de  $E$*  como

$$\text{Dim}_{\text{cap}}(E) = \sup \{\alpha : \text{cap}_\alpha(E) > 0\} = \inf \{\alpha : \text{cap}_\alpha(E) = 0\}.$$

Observemos que  $0 \leq \text{Dim}_{\text{cap}}(E) \leq N$ . El hecho crucial es que

**Teorema** [KS, p. 34]. *Para todo boreliano de  $\mathbb{R}^N$ , la dimensión capacitaria de  $E$  coincide con su dimensión de Hausdorff.*

**EJEMPLOS:**

1) Si  $E$  tiene medida de Lebesgue positiva, entonces  $\text{Dim}(E) = N$ . Como vimos anteriormente, es suficiente verlo si  $E$  tiene medida finita. Pero entonces,  $L/L(E)$  es una probabilidad en  $E$  que tiene  $\alpha$ -energía finita para todo  $0 < \alpha < N$ . Por tanto,  $\text{Dim}(E) = N$ .

2) Cualquier conjunto finito o numerable tiene  $\alpha$ -capacidad nula para todo  $0 \leq \alpha < N$ , ya que todas las probabilidades en  $E$  son combinaciones de deltas de Dirac. Por tanto, todo conjunto finito o numerable tiene dimensión cero.

3) Por 1) vemos que los conjuntos con  $\text{Dim}(E) \in [0, N)$  tienen medida cero. Esto deja patente el interés de las capacidades y contenidos pues son formas de medir el tamaño, que discriminan entre conjuntos de medida nula.

## 1.8. Función de Green de un dominio plano.

Sea ahora  $E$  un compacto en  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ , y veamos que el comportamiento asintótico del potencial logarítmico

$$U^{\mu_e}(x) = \int_E \log \frac{1}{|x-y|} d\mu_e(x)$$

de la medida de equilibrio de  $E$  nos da una importante interpretación de la capacidad logarítmica en el marco de la teoría de las funciones analíticas. Supongamos que  $\text{cap}_0(E) > 0$ . Entonces ([L, p. 136], [A, p. 25])

$$U^{\mu_e}(x) \begin{cases} = I_0(\mu_e), & \text{aproximadamente en todo } E, \\ \leq I_0(\mu_e), & \text{para todo } x \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

donde la expresión “aproximadamente en todo  $E$ ” significa igualdad, salvo, a lo sumo, en un subconjunto de capacidad logarítmica nula.

Por otro lado, cuando  $|x| \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned} (1.18) \quad U^{\mu_e}(x) &= \log \frac{1}{|x|} + \int_E \log \frac{1}{\left|1 - \frac{y}{x}\right|} d\mu_e(y) \\ &= \log \frac{1}{|x|} + O\left(\frac{1}{|x|}\right). \end{aligned}$$

Por tanto, la función

$$g_E(x) = -U^{\mu_e}(x) + I_0(\mu_e),$$

que es armónica en  $\Omega_\infty$ , la componente conexa no acotada de  $\mathbb{C} \setminus E$ , cumple que

1)  $g_E(x) = 0$ , aproximadamente en todo  $E$ , en particular en  $\partial\Omega_\infty$ .

2)  $g_E(x) \geq 0$ , en  $\Omega_\infty$ .

3) El comportamiento en infinito de  $g_E(x)$  es, por (1.18),

$$\begin{aligned} (1.19) \quad g_E(x) &= \log |x| + I_0(\mu_e) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \\ &= \log |x| + \log \frac{1}{\text{cap}_0(E)} + O\left(\frac{1}{|x|}\right). \end{aligned}$$

La función  $g_E(x)$  que está unívocamente caracterizada por 1), 2) y 3) (los conjuntos de capacidad logarítmica nula son de unicidad para el problema de Dirichlet) recibe el nombre de *la función de Green de  $\Omega_\infty$  con polo en infinito* [A1, p. 257].

La constante

$$(1.20) \quad \gamma_E = \lim_{|x| \rightarrow \infty} g_E(x) - \log |x| = \log \frac{1}{\text{cap}_0(E)}$$

recibe el nombre de *constante de Robin de  $E$* .

Observemos que  $\gamma_E = \gamma_{\partial\Omega_\infty}$ , y por tanto, una primera consecuencia de (1.20) es que

$$\text{cap}_0(E) = \text{cap}_0(\partial\Omega_\infty) = \text{cap}_0(\mathbb{C} \setminus \Omega_\infty).$$

Además es claro que (1.20) nos proporciona otra forma de calcular  $\text{cap}_0(E)$ .

La función de Green de  $\Omega_\infty$  está íntimamente relacionada con la aplicación de Riemann de  $\Omega_\infty$ , si esta última es simplemente conexa.

En efecto, en este caso, definiendo la función armónica conjugada  $h_E(x)$  de  $g_E(x)$  tal que

$$h_E(x) = \arg x + O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \text{cuando } |x| \rightarrow \infty,$$

la función

$$f_E(z) = e^{g_E(z) + ih_E(z)}$$

es analítica en  $\Omega_\infty$  y realiza una aplicación conforme de  $\Omega_\infty$  sobre  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ . Además para  $|z|$  grande

$$f_E(z) = \frac{1}{\text{cap}_0(E)} z + O(1),$$

lo que prueba que la capacidad logarítmica de  $E$  coincide con el radio conforme (externo) de  $E$ , [Go].

Otra consecuencia de (1.19) es la invariancia de  $\text{cap}_0(E)$  por transformaciones conformes normalizadas en infinito. En efecto, sea  $f : \Omega_\infty \rightarrow \Omega_1$  una transformación conforme con  $f(\infty) = \infty$ , y tal que el desarrollo de Laurent de  $f(z)$  en  $\infty$  tiene la forma

$$f(z) = z + \dots$$

es decir,  $f$  está normalizada de forma que

$$(1.21) \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z} = 1.$$

Si  $g_1$  es la función de Green de  $\Omega_1$  con polo en infinito, entonces  $g_1 \circ f$  es la función de Green de  $\Omega_\infty$  con polo en infinito. Si  $E_1 = \mathbb{C} \setminus \Omega_1$ , se sigue de (1.20) y (1.21) que

$$\text{cap}_0(E_1) = \text{cap}_0(E),$$

puesto que  $\gamma_{E_1} = \gamma_E$ .

Observemos que  $f$  no aplica  $E$  en  $E_1$ ! sino que la comparación viene de pasar a las componentes conexas no acotadas de  $\mathbb{C} \setminus E$  y  $\mathbb{C} \setminus E_1$ .

Sin la condición de normalización (1.21), habríamos obtenido

$$(1.22) \quad \text{cap}_0(E_1) = |a| \text{cap}_0(E),$$

donde  $f(z) = az + \dots$

Finalmente, señalemos que (1.19) permite calcular fácilmente la capacidad logarítmica en ciertos casos particulares (¡sin hallar la medida de equilibrio!)

Por ejemplo, si  $E = \partial\Delta$ , es claro que la función  $\log|z|$  cumple 1), 2) y 3) con  $\gamma_E = 0$ . Por tanto,  $g_{\partial\Delta}(z) = \log|z|$ , y  $\text{cap}_0(\partial\Delta) = \text{cap}_0(\Delta) = 1$ .

Ahora, por (1.22), se sigue que

$$\text{cap}_0(\Delta_R) = \text{cap}_0(\partial\Delta_R) = R,$$

donde  $\Delta_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ .

Utilizando la función

$$(1.23) \quad f(z) = z + \frac{1}{z}$$

que transforma  $\{|z| > 1\}$  en el complemento del segmento  $[-2, 2]$  vemos que

$$\text{cap}_0([-2, 2]) = 1$$

y, nuevamente por (1.22)

$$\text{cap}_0([- \ell, \ell]) = \frac{\ell}{2}.$$

Ahora, nuevamente haciendo uso de la función (1.23) es fácil ver que la capacidad logarítmica de un arco en  $\partial\Delta$  de medida de Lebesgue  $\ell$  ( $0 \leq \ell \leq 2\pi$ ) es  $\text{sen}(\ell/4)$ .

También es sencillo probar [L, p. 173] que si  $E_\pi$  denota la proyección ortogonal del compacto  $E$  sobre una línea recta cualquiera, entonces

$$\text{cap}_0(E) \geq \text{cap}_0(E_\pi) \geq \frac{L(E_\pi)}{4},$$

donde  $L(E_\pi)$  denota la medida de Lebesgue (lineal) de  $E_\pi$ .



### 1.9. Uniformización, métrica hiperbólica y exponente de convergencia.

En esta sección se describen algunos tópicos que serán necesarios en el Capítulo 6. Referencias básicas en este contexto son [A2, Capítulos 9 y 10] y [Ni].

Sea  $\mathcal{R}$  una superficie de Riemann. Una *superficie de cubrimiento* de  $\mathcal{R}$  es un par  $(S, f)$  donde  $S$  es una superficie de Riemann y  $f : S \rightarrow \mathcal{R}$  es holomorfa y homeomorfismo local. Si  $(S_1, f_1)$  es una superficie de cubrimiento de  $\mathcal{R}$ , y  $(S_2, f_{21})$  es un cubrimiento de  $S_1$ , es claro que entonces  $(S_2, f_1 \circ f_{21})$  es de nuevo un cubrimiento, que diremos *más fuerte*, de  $\mathcal{R}$ . Obsérvese que si dos cubrimientos son mutuamente uno más fuerte que el otro, entonces son conformemente equivalentes y pueden considerarse esencialmente el mismo.

Los subgrupos del grupo fundamental  $\Pi_1(\mathcal{R}, p_0)$  con punto base  $p_0 \in \mathcal{R}$  [Ma] tienen orden parcial “inverso” al de las superficies de cubrimiento de  $\mathcal{R}$  [A2]. Esto tiene como consecuencia que:

Existe un cubrimiento de  $\mathcal{R}$  que es *el más fuerte* de todos. Tal cubrimiento  $(\tilde{\mathcal{R}}, \pi)$  se llama el *cubrimiento universal* de  $\mathcal{R}$  y tiene la propiedad de que su grupo fundamental  $\Pi_1(\tilde{\mathcal{R}}, \tilde{p}_0)$  con punto base  $\tilde{p}_0 \in \tilde{\mathcal{R}}$ , es trivial. Por tanto,  $\tilde{\mathcal{R}}$  es simplemente conexa.

Si  $\mathcal{R}$  es una superficie de Riemann y  $\pi : \tilde{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{R}$  es su cubrimiento universal, el *grupo de cubrimiento*  $\Gamma$  de  $\mathcal{R}$  (asociado a  $\pi$ ) es el grupo de transformaciones biholomorfas  $\gamma : \tilde{\mathcal{R}} \rightarrow \tilde{\mathcal{R}}$  tales que  $\pi \circ \gamma = \pi$  (lo que equivale a decir que  $p$  y  $\gamma(p)$  tienen la misma proyección). Se tiene que  $\Gamma$  es isomorfo al grupo fundamental  $\Pi_1(\mathcal{R}, p_0)$  [A2].

El grupo  $\Gamma$  actúa discontinuamente y sin puntos fijos y  $\mathcal{R}$  es conformemente equivalente a  $\tilde{\mathcal{R}}/\Gamma$ . Recíprocamente, dado cualquier grupo  $\Gamma$  de transformaciones biholomorfas  $\gamma : \tilde{\mathcal{R}} \rightarrow \tilde{\mathcal{R}}$  que actúen discontinuamente y sin puntos fijos,  $\tilde{\mathcal{R}}/\Gamma$  es una superficie de Riemann y  $\pi : \tilde{\mathcal{R}} \rightarrow \tilde{\mathcal{R}}/\Gamma$  es su recubrimiento universal. Un tal grupo  $\Gamma$  se llama un *grupo Fuchsiano* si  $\tilde{\mathcal{R}} = \Delta$ .

Un hecho fundamental es que existen muy pocas superficies de Riemann simplemente conexas:

**Teorema de uniformización** [A2, p. 142]. *Toda superficie de Riemann simplemente conexa es conformemente equivalente al disco unidad del plano complejo  $\Delta$ , al propio plano complejo  $\mathbb{C}$ , o a la esfera de Riemann  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .*

Por tanto  $\tilde{\mathcal{R}} = \Delta$ ,  $\mathbb{C}$  ó  $\hat{\mathbb{C}}$ .

Si  $\tilde{\mathcal{R}} = \hat{\mathbb{C}}$ , entonces  $\mathcal{R}$  ha de ser necesariamente  $\hat{\mathbb{C}}$ , ya que  $\hat{\mathbb{C}}$  solo puede ser espacio recubridor de sí misma.

Si  $\tilde{\mathcal{R}} = \mathbb{C}$ , el grupo de cubrimiento ha de estar constituido necesariamente por transformaciones de la forma  $\gamma(z) = z + a$  para que no haya puntos fijos en  $\mathbb{C}$ ; como, además, el grupo debe actuar discontinuamente,  $\Gamma$  ha de ser o bien el grupo trivial o bien debe tener uno o dos generadores. Por tanto  $\mathcal{R}$  tiene que ser conformemente equivalente a  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , o a un toro, respectivamente (hay toda una variedad unidimensional de toros no conformemente equivalentes entre sí).

Estas superficies que no tienen como recubridor universal al disco  $\Delta$  se llaman *excepcionales*. Todas las demás, que llamaremos *hiperbólicas*, tienen al disco como recubridor universal.

Las transformaciones biholomorfas que preservan  $\Delta$  son precisamente las isometrías que conservan orientación, del disco dotado de la métrica de Poincaré,

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - |z|^2)^2} \quad \text{ó} \quad ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}.$$

Estas isometrías son las transformaciones de Möbius (forman el grupo de Möbius),

$$\text{Möb}(\Delta) = \left\{ T : \Delta \longrightarrow \Delta, \quad T(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad a \in \Delta, \quad \theta \in [0, 2\pi) \right\}.$$

El disco con esta métrica constituye el modelo de Poincaré de la geometría hiperbólica, en el que las geodésicas son los diámetros y los arcos de circunferencia perpendiculares a  $\partial\Delta$ , y que tiene curvatura  $K = -1$ . La razón de los factores 2 y 4 en las expresiones de  $ds$  y  $ds^2$  es precisamente lograr que la métrica tenga curvatura  $K = -1$ .

Otro modelo conformemente equivalente a éste es el semiplano superior  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$  con la métrica

$$ds = \frac{|dz|}{y},$$

en el que las geodésicas son, o bien arcos de circunferencia perpendiculares a  $\mathbb{R}$ , o rayos verticales.

Dada cualquier superficie de Riemann hiperbólica, si  $\pi : \Delta \longrightarrow \mathcal{R}$  es su cubrimiento universal, y dada  $T \in \text{Möb}(\Delta)$ , entonces  $\pi \circ T : \Delta \longrightarrow \mathcal{R}$  es también un cubrimiento universal y, de hecho, estos son todos. Por tanto, al elegir un cubrimiento universal, podemos prefijar  $\pi(0)$  y, por ejemplo, el argumento de  $\pi'(0)$ .

Obsérvese ahora que el grupo de cubrimiento  $\Gamma$  asociado a  $\pi : \Delta \longrightarrow \mathcal{R}$  es un subgrupo de  $\text{Möb}(\Delta)$  y como  $\mathcal{R}$  es conformemente equivalente a  $\Delta/\Gamma$ , los grupos

Fuchsianos  $\Gamma$  que podemos elegir son únicos salvo conjugación por un elemento de  $\text{Möb}(\Delta)$ . Por otro lado, como  $\Gamma$  es un grupo de isometrías en la métrica de Poincaré de  $\Delta$ , puede proyectarse dicha métrica mediante  $\pi$ , obteniéndose una métrica Riemanniana conforme, completa y con curvatura  $K = -1$  en  $\mathcal{R} = \Delta/\Gamma$ .

Si  $\Omega = \mathcal{R}$  es un dominio plano, el término conforme se refiere a que la métrica es conforme con la métrica euclídea, esto es,

$$ds = \lambda_{\Omega}(z) |dz|, \quad z \in \Omega.$$

La función  $\lambda_{\Omega}(z)$  se denomina la *densidad de la métrica hiperbólica de  $\Omega$* . Las densidades de las métricas  $\lambda_{\Delta}(z)$  y  $\lambda_{\Omega}(z)$  verifican la relación

$$\lambda_{\Omega}(\pi(z)) |\pi'(z)| = \lambda_{\Delta}(z), \quad z \in \Delta,$$

donde  $\pi : \Delta \rightarrow \Omega$  es el cubrimiento universal.

Conocer  $\lambda_{\Omega}(z)$  es tan difícil como conocer  $\pi$ , pero existen ciertas cotas [A2] para  $\lambda_{\Omega}$ , a saber:

Como consecuencia del lema de Schwarz se tiene que

$$\lambda_{\Omega}(z) \leq \frac{2}{d(z, \partial\Omega)},$$

donde  $d$  denota distancia euclídea.

Usando el teorema 1/4 de Koebe, se ve que

$$\lambda_{\Omega}(z) \geq \frac{1}{2d(z, \partial\Omega)},$$

si  $\Omega$  es simplemente conexo.

En ciertos casos particulares se pueden obtener cotas mejores. Por ejemplo [A2, p. 17]

$$\lambda_{\mathbb{C} \setminus \{0,1\}}(z) \leq \frac{1}{|z| \log \frac{1}{|z|}}, \quad |z| < 1.$$

Usaremos esta estimación en el Capítulo 6.

La longitud de una curva  $\gamma \subset \Omega$  en la métrica de Poincaré de  $\Omega$  es

$$L_{\Omega}(\gamma) = \int_{\gamma} \lambda_{\Omega}(z) |dz|$$

y la distancia inducida se define como

$$\rho_{\Omega}(z_1, z_2) = \inf \{ L_{\Omega}(\gamma) : \gamma \subset \Omega \text{ curva uniendo } z_1 \text{ con } z_2 \}.$$

El ínfimo se alcanza y, de hecho, la curva que da el mínimo es un arco de geodésica en  $\Omega$  en la métrica hiperbólica.

Si  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  es holomorfa, una reformulación del lema de Schwarz implica que

$$\rho_{\Delta}(f(z), f(w)) \leq \rho_{\Delta}(z, w), \quad \text{para todos } z, w \in \Delta.$$

De hecho, se cumple una versión mucho más fuerte de este hecho. Si  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{R}$  es holomorfa, entonces

$$\rho_{\mathcal{R}}(f(p), f(q)) \leq \rho_{\mathcal{S}}(p, q), \quad \text{para todos } p, q \in \mathcal{S},$$

es decir, las aplicaciones holomorfas son contractivas para la métrica hiperbólica.

En particular, si  $f$  es la inclusión de  $\Omega_1$  en  $\Omega_2$ , donde  $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$  son dominios planos, entonces

$$\lambda_{\Omega_2}(z) \leq \lambda_{\Omega_1}(z), \quad \text{para todo } z \in \Omega_1.$$

Dada una curva  $\gamma$  con punto base  $p \in \mathcal{R}$ , denotemos por  $[\gamma]$  la clase de homotopía de  $\gamma$  en  $\Pi_1(\mathcal{R}, p)$ , el grupo fundamental de  $\mathcal{R}$ . La longitud de la clase  $[\gamma]$  se define por

$$L_{\mathcal{R}}([\gamma]) = \inf \{L_{\mathcal{R}}(\eta) : \eta \in [\gamma]\}.$$

Consideremos ahora la serie absoluta de Poincaré

$$U_p(t) = \sum_{[\gamma] \in \Pi_1(\mathcal{R}, p)} e^{-t L_{\mathcal{R}}([\gamma])}, \quad t > 0.$$

Si  $\pi : \Delta \rightarrow \mathcal{R} = \Delta/\Gamma$  es un cubrimiento universal con  $\pi(0) = p$ , y  $\gamma$  es una curva cerrada en  $\mathcal{R}$  con punto base  $p$ , denotemos por  $\tilde{\gamma}$  la elevación de  $\gamma$  a  $\Delta$  que comienza en 0 y termina en, digamos,  $z$ . Por el teorema de monodromía, este punto final es el mismo para la elevación de cualquier curva homótopa a  $\gamma$  que comience en 0. Además, es claro que  $\pi(z) = \pi(0) = p$ , por lo que  $z = T(0)$  para una única  $T \in \Gamma$ . Por otro lado, si  $\sigma$  es el segmento (arco de geodésica en  $\Delta$ ) que une 0 con  $z$ , se tiene que

$$L_{\mathcal{R}}(\pi \circ \sigma) \leq L_{\Delta}(\sigma) \leq L_{\Delta}(\tilde{\eta}) = L_{\mathcal{R}}(\eta),$$

para toda curva  $\eta \in [\gamma]$ ; como, además,  $\pi \circ \sigma \in [\gamma]$ , se tiene que  $L_{\mathcal{R}}([\gamma])$  es, de hecho, un mínimo y

$$L_{\mathcal{R}}([\gamma]) = L_{\mathcal{R}}(\pi \circ \sigma) = \rho_{\Delta}(0, T(0)) = \log \frac{1 + |T(0)|}{1 - |T(0)|}.$$

Por tanto,

$$U_p(t) = \sum_{T \in \Gamma} e^{-t \rho_{\Delta}(0, T(0))} = \sum_{T \in \Gamma} \left( \frac{1 - |T(0)|}{1 + |T(0)|} \right)^t.$$

Puesto que  $1 \leq (1 + |T(0)|)^t \leq 2^t$ , vemos que

$$U_p(t) < +\infty \iff \sum_{T \in \Gamma} (1 - |T(0)|)^t < +\infty.$$

Por otro lado, es conocido que ([T, p. 516], [Ni, p. 21])  $U_p(t) < +\infty$  si  $t > 1$ . Por tanto resulta natural definir el exponente de convergencia de  $\mathcal{R}$  (o de  $\Gamma$ ) como

$$\delta(\mathcal{R}) = \delta(\Gamma) = \inf \{t : U_p(t) < +\infty\} = \inf \left\{t : \sum_{T \in \Gamma} (1 - |T(0)|)^t < +\infty\right\},$$

esto es, la abcisa de convergencia de  $U_p(t)$ .

Observemos que se obtiene el mismo exponente de convergencia si se sustituye 0 por cualquier otro punto de  $\Delta$ , pues ello sólo supone conjugación en el grupo  $\Gamma$  y las transformaciones de Möbius conservan  $\rho_\Delta$ .

Por lo anterior, vemos que  $\delta(\mathcal{R}) \in [0, 1]$ . Por otro lado,  $\delta(\mathcal{R}) > 0$ , salvo que  $\mathcal{R}$  sea conformemente equivalente al disco o a un anillo, y  $\delta(\Delta \setminus \{0\}) = 1/2$ . También es fácil ver [Ni, p. 22] que si  $\mathcal{R}$  tiene área finita, o más generalmente, si  $\mathcal{R}$  no tiene función de Green [T, p. 522], entonces  $\delta(\mathcal{R}) = 1$  y  $U_p(1) = +\infty$ . Todos estos hechos nos dicen que  $\delta(\mathcal{R})$  tiene que ver con el tamaño de la “frontera” de  $\mathcal{R}$  a la que, en cierto sentido, mide.

Existe una relación directa entre  $\delta(\mathcal{R})$  y el conjunto límite  $\Lambda(\Gamma)$  de  $\Gamma$ . Este se define como el mínimo cerrado de  $\partial\Delta$  que es invariante por la acción de  $\Gamma$ , o también como el conjunto de puntos de acumulación de la órbita  $\Gamma(0)$  de 0 (se puede tomar la órbita de cualquier otro punto de  $\Delta$ ). Un importante subconjunto de  $\Lambda(\Gamma)$  es el conjunto límite cónico, denotado  $C(\Gamma)$ , que se define como el conjunto de los  $\xi \in \Lambda(\Gamma)$  tales que alguna subsucesión de  $\Gamma(0)$  está dentro de algún cono de Stolz con vértice en  $\xi$ . Una exposición detallada de éste y otros subconjuntos de  $\Lambda(\Gamma)$  se encuentra en [Ni, Capítulo 2].

Si  $\Gamma$  es finitamente generado ambos conjuntos límite coinciden salvo en un conjunto numerable, el conjunto de los puntos fijos de los elementos parabólicos de  $\Gamma$ . Si  $\Gamma$  no es finitamente generado esto no tiene por qué ocurrir. Por ejemplo, si  $\hat{\mathbb{C}} - E = \Delta/\Gamma$ , donde  $E$  es el conjunto de Cantor clásico, entonces  $\dim(C(\Gamma)) < 1$  y  $\dim(\Lambda(\Gamma)) = 1$ . Esto se deduce como consecuencia del teorema de Patterson y Sullivan que ahora enunciaremos y de [F2].

El teorema de S. J. Patterson y D. Sullivan comentado (ver por ejemplo [N2, p. 159]) afirma que

$$\dim(C(\Gamma)) = \delta(\mathcal{R}),$$

con la única excepción de  $\mathcal{R} = \Delta \setminus \{0\}$  ya que  $\delta(\Delta \setminus \{0\}) = 1/2$  y  $\Lambda(\Delta \setminus \{0\})$  consta de un único punto (su grupo de cubrimiento es elemental). En particular,

$$\dim(\Lambda(\Gamma)) \geq \delta(\mathcal{R}),$$

y si  $\Gamma$  es finitamente generado,

$$\text{Dim}(\Lambda(\Gamma)) = \delta(\mathcal{R}).$$

## Capítulo 2

### Distorsión del contenido de conjuntos frontera

En este capítulo extenderemos el lema de Löwner a dimensiones fraccionarias midiendo la distorsión en términos de  $\alpha$ -contenido. En primer lugar, veremos la extensión de N. G. Makarov [M] para el caso de funciones univalentes. Su prueba reduce el problema a la desigualdad de Pommerenke para la capacidad logarítmica que veremos en el Capítulo 3. En la segunda sección probaremos el teorema de distorsión para funciones internas en la bola unidad de  $\mathbb{C}^n$  ( $n \geq 1$ ). La prueba, que aparece en [FPR] es una extensión de la del caso  $n = 1$  que puede encontrarse en [FP]. Además, enunciamos y demostramos el teorema también para el caso en que la métrica euclídea en  $\partial\mathbb{B}_n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$  es sustituida por una métrica equivalente a la métrica de Carnot-Carathéodory en el grupo de Heisenberg. Finalmente, en la Sección 2.3 probamos que, al menos en el caso  $n = 1$ , las desigualdades no pueden invertirse por lo que, en este caso, el Teorema 1 es “sharp”.

El Capítulo se estructura de la siguiente forma:

- 2.1. Funciones univalentes: Teorema de Makarov.
- 2.2. Funciones internas.
- 2.3. Un ejemplo en dimensión  $n = 1$ .

## 2.1. Funciones univalentes: Teorema de Makarov.

En 1.988, N. G. Makarov logró probar la siguiente extensión del lema de Löwner.

**Teorema A.** *Sea  $f : \Delta \longrightarrow \Delta$  una función univalente con  $f(0) = 0$ . Si  $E$  es un boreliano de  $\partial\Delta$  tal que  $f(E) \subseteq \partial\Delta$ , y si  $0 < \alpha \leq 1$ , entonces*

$$M_\alpha(f(E)) \geq C_\alpha M_\alpha(E).$$

*En particular,*

$$\text{Dim}(f(E)) \geq \text{Dim}(E),$$

*para cualquier  $f : \Delta \longrightarrow \Delta$  univalente.*

Recordemos que  $f(E)$  denota el conjunto de límites radiales

$$f(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta}), \quad e^{i\theta} \in E.$$

Tales límites están definidos salvo en un subconjunto de  $E$  de capacidad logarítmica nula y, por tanto, de  $\alpha$ -contenido nulo, para todo  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ .

DEMOSTRACIÓN. Es conocido que existe una constante  $C_\beta$  tal que

$$(2.1) \quad M_\beta(A) \leq C_\beta (\text{cap}_0(A))^\beta, \quad 0 \leq \beta \leq 1,$$

para todo boreliano  $A$  en  $\mathbb{R}^2$  (ver, por ejemplo, [L, p. 203]). Aquí  $\text{cap}_0$  denota capacidad logarítmica. Dado  $\varepsilon > 0$ , sea  $\{I_j\}_{j=1}^\infty$  un cubrimiento de  $f(E)$  con intervalos (arcos) de radio  $r_j$  tal que

$$\sum_j r_j^\beta < M_\beta(f(E)) + \varepsilon.$$

Para cada  $j$ , denotemos por  $E_j$  el conjunto

$$E_j = \{\xi \in E : f(\xi) \in I_j\} = E \cap f^{-1}(I_j).$$

Puesto que  $f(E_j) \subseteq I_j$ , el teorema de Pommerenke (Capítulo 3, Teorema B) nos dice que

$$(2.2) \quad \text{cap}_0(E_j) \leq \text{cap}_0(I_j).$$



Se sigue, usando (2.1), (2.2) y el hecho de que  $\text{cap}_0(I_j) \leq C r_j$ , que

$$\begin{aligned} M_\beta(E) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} M_\beta(E_j) \\ &\leq C_\beta \sum_{j=1}^{\infty} (\text{cap}_0(E_j))^\beta \\ &\leq C_\beta \sum_{j=1}^{\infty} (\text{cap}_0(I_j))^\beta \\ &\leq C_\beta \sum_{j=1}^{\infty} r_j^\beta \\ &< C_\beta (M_\beta(f(E)) + \varepsilon). \end{aligned}$$

Puesto que  $\varepsilon > 0$  era arbitrario, esto concluye la prueba.

## 2.2. Funciones internas.

En esta sección consideraremos dos métricas en  $\mathbb{S}_n = \partial\mathbb{B}_n$ , la esfera unidad de  $\mathbb{C}^n$  ( $n \geq 1$ ): la métrica euclídea y la métrica

$$d(a, b) = |1 - \langle a, b \rangle|^{1/2}, \quad a, b \in \mathbb{S}_n,$$

donde

$$\langle a, b \rangle = \sum_{j=1}^n a_j \bar{b}_j$$

es el producto escalar hermitico usual de  $\mathbb{C}^n$ . Una buena referencia donde encontrar más detalles acerca de esta métrica es [R2]. Si  $E$  es un boreliano de  $\mathbb{S}_n$ , denotaremos por  $M_\alpha(E)$  y  $\mathcal{M}_\alpha(E)$  el  $\alpha$ -contenido de  $E$  con respecto a la métrica euclídea y la métrica  $d$ , respectivamente.

El siguiente teorema extiende el lema de Löwner a dimensiones fraccionarias y a dimensión superior.

**Teorema 1** ([FP], [FPR]). *Si  $f : \mathbb{B}_n \rightarrow \Delta$  es interna,  $f(0) = 0$ , y  $E$  es un boreliano de  $\partial\Delta$ , entonces, para  $0 < \alpha \leq 1$ ,*

$$(2.3) \quad M_{2n-2+\alpha}(f^{-1}(E)) \geq C_{n,\alpha} M_\alpha(E)$$

y

$$(2.4) \quad \mathcal{M}_{2(n-1+\alpha)}(f^{-1}(E)) \geq C'_{n,\alpha} M_\alpha(E).$$

En particular si  $f : \mathbb{B}_n \longrightarrow \Delta$  es una función interna cualquiera y  $E$  es un boreliano de  $\partial\Delta$ , entonces

$$(2.5) \quad \text{Dim}(f^{-1}(E)) \geq 2n - 2 + \text{Dim}(E)$$

y

$$(2.6) \quad \text{Dim}(f^{-1}(E)) \geq 2n - 2 + 2 \text{Dim}(E),$$

donde  $\text{Dim}$  and  $\text{Dim}$  denotan, respectivamente, la dimensión de Hausdorff con respecto a la métrica euclídea y la métrica  $d$ .

OBSERVACIÓN. Si  $n = 1$ , (2.5) y (2.6) coinciden pues, en este caso,

$$d(a, b) = |a - b|^{1/2}, \quad b \in \partial\Delta,$$

con lo que

$$\text{Dim}(A) = 2 \text{Dim}(A),$$

para todo boreliano de  $\partial\Delta$ .

En cambio, si  $n > 1$ , (2.5) y (2.6) son independientes. Esto se debe al hecho de que las bolas en la métrica  $d$  son "elipses" euclídeas en  $\mathbb{S}_n$  con excentricidad no acotada cuando el radio tiende a cero.

Para probar el Teorema 1, demostraremos un lema acerca de integrales de Poisson y para ello hemos de considerar el núcleo de Poisson clásico (no normalizado)

$$P(\xi, z) = \frac{1 - |z|^2}{|\xi - z|^{2n}}, \quad (z \in \mathbb{B}_n, \xi \in \mathbb{S}_n),$$

y el núcleo de Poisson invariante (por los automorfismos de  $\mathbb{B}_n$ )

$$Q(\xi, z) = \frac{(1 - |z|^2)^n}{|1 - \langle z, \xi \rangle|^{2n}}, \quad (z \in \mathbb{B}_n, \xi \in \mathbb{S}_n).$$

Por supuesto, ambos coinciden si  $n = 1$ .

En esta sección, si  $\nu$  es una medida positiva en  $\mathbb{S}_n$ , denotaremos por  $P_\nu$  la extensión de Poisson clásica de  $\nu$ , es decir,

$$P_\nu(z) = \int_{\mathbb{S}_n} P(\xi, z) d\nu(\xi)$$

y por  $Q_\nu$  la extensión de Poisson invariante,

$$Q_\nu(z) = \int_{\mathbb{S}_n} Q(\xi, z) d\nu(\xi).$$

**Lema 2.1.** *Sea  $\mu$  una medida positiva y finita en  $\partial\Delta$ , y sea  $f : \mathbb{B}_n \rightarrow \Delta$  una función interna. Entonces, existe una medida finita  $\nu \geq 0$  en  $\mathbb{S}_n$  tal que  $P_\mu \circ f = P_\nu$ . Además, si  $\nu$  tiene parte singular  $\sigma$  y parte absolutamente continua  $\gamma$ , y denotamos*

$$A = \{\xi \in \mathbb{S}_n : P_\sigma(r\xi) \rightarrow +\infty, \text{ cuando } r \rightarrow 1\}$$

y

$$B = \{\xi \in \mathbb{S}_n : \exists \lim_{r \rightarrow 1} f(r\xi) = f(\xi), |f(\xi)| = 1, \text{ y } \lim_{r \rightarrow 1} P_\gamma(r\xi) > 0\},$$

entonces

$$A \cup B \subseteq f^{-1}(\text{soporte}(\mu))$$

y por tanto,

$$\nu(f^{-1}(\text{soporte}(\mu))) = \|\nu\|,$$

puesto que  $A$  tiene  $\sigma$ -medida plena y  $B$  tiene  $\gamma$ -medida plena.

Lo mismo es válido si reemplazamos  $P_\nu$  por  $Q_{\nu'}$  para (posiblemente) otra medida  $\nu' \geq 0$ , y  $A, B$  por los siguientes conjuntos

$$A' = \{\xi \in \mathbb{S}_n : Q_{\sigma'}(r\xi) \rightarrow +\infty, \text{ cuando } r \rightarrow 1\}$$

y

$$B' = \{\xi \in \mathbb{S}_n : \exists \lim_{r \rightarrow 1} f(r\xi) = f(\xi), |f(\xi)| = 1, \text{ y } \lim_{r \rightarrow 1} Q_{\gamma'}(r\xi) > 0\},$$

donde  $\sigma'$  and  $\gamma'$  denotan, respectivamente, las partes singular y absolutamente continua de  $\nu'$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Probaremos el lema solamente para la medida  $\nu'$ , puesto que la prueba del resultado para  $\nu$  es similar y más estándar.

Sea  $U : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa tal que  $\text{Re } U = P_\mu$ . Entonces  $U$  o  $f$  es también holomorfa y, por tanto,  $\text{Re}(U \circ f) = P_\mu \circ f$  es pluriarmónica, es decir, armónica y  $\mathcal{M}$ -armónica (ver, por ejemplo, [R2, Teorema 4.4.9]). Por tanto, existen dos medidas finitas y positivas  $\nu$  y  $\nu'$  en  $\mathbb{S}_n$  tales que

$$P_\mu \circ f = P_\nu, \quad P_\mu \circ f = Q_{\nu'}.$$

Denotemos por  $E$  el soporte de la medida  $\mu$ . Si  $\xi \in A'$ , entonces  $|f(r\xi)| \rightarrow 1$  cuando  $r \rightarrow 1$ . La curva  $\{f(r\xi) : 0 \leq r < 1\}$ , que está contenida en  $\Delta$ , debe terminar en un único punto  $e^{i\psi} = f(\xi) \in \Delta$ , puesto que, en otro caso,  $P_\mu \equiv +\infty$  sobre un conjunto de medida de Lebesgue positiva, lo cual es imposible puesto que

$$P_\mu(re^{i\theta}) \rightarrow \frac{d\mu}{dL}(e^{i\theta}) \quad \text{c.t.p. } L,$$

y la derivada de Radon-Nikodym  $d\mu/dL \in L^1(\partial\Delta)$ . Ahora bien,  $e^{i\psi} \in E$ , puesto que, en otro caso,  $P_\mu$  se anularía continuamente en  $e^{i\psi}$ , lo que contradice el hecho de que  $Q_{\nu'}(r\xi) \rightarrow +\infty$ . Por tanto,  $A' \subseteq f^{-1}(E)$ .

Si  $\xi \in B'$ , entonces

$$\lim_{r \rightarrow 1} P_\mu(f(r\xi)) = \lim_{r \rightarrow 1} Q_{\nu'}(r\xi) \geq \lim_{r \rightarrow 1} Q_{\gamma'}(r\xi) > 0.$$

Puesto que  $\mu$  está concentrada en  $E$ , esto significa que  $f(\xi) \in E$ , y, por tanto, que  $B' \subseteq f^{-1}(E)$ .

Por otro lado, el conjunto  $A'$  tiene  $\sigma'$ -medida plena, puesto que, por la desigualdad (2.9), que luego probaremos,

$$\{\xi \in \mathbb{S}_n : \underline{D} \sigma'(\xi) = +\infty\} \subseteq A',$$

donde

$$\underline{D} \sigma'(\xi) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\sigma'(B_d(\xi, r))}{|B_d(\xi, r)|},$$

y el conjunto  $\{\xi : \underline{D} \sigma'(\xi) = +\infty\}$  tiene  $\sigma'$ -medida plena (ver el Lema 2.2 más abajo). Observemos aquí que ([R2, p. 67])

$$|B_d(\xi, r)| \sim r^{2n},$$

donde  $|\cdot|$  denota medida de Lebesgue.

El conjunto  $B'$  tiene  $\gamma'$ -medida plena, puesto que cuando  $r \rightarrow 1$ ,

$$Q_{\gamma'}(r\xi) \longrightarrow \frac{d\gamma'}{dL} \quad \text{c.t.p.}$$

con respecto a la medida de Lebesgue  $L$  (ver, por ejemplo, [R2, Teorema 5.4.9]) y  $\{\frac{d\gamma'}{dL} > 0\}$  tiene  $\gamma'$ -medida plena.  $\square$

**Lema 2.2.** *Supongamos que  $\mu$  es una medida positiva de Borel en  $\mathbb{S}_n$  que es singular (con respecto a la medida de Lebesgue). Entonces*

$$\underline{D} \mu(x) = \infty, \quad \text{c.t.p. } \mu.$$

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $\mathcal{A}$  un boreliano tal que  $|\mathcal{A}| = 0$  y  $\mu$  está concentrada en  $\mathcal{A}$ . Definamos los subconjuntos

$$\mathcal{A}_\alpha = \{x \in \mathcal{A} : \underline{D} \mu(x) < \alpha\}, \quad \alpha > 0.$$

Basta con que probemos que  $\mu(\mathcal{A}_\alpha) = 0$ , para todo  $\alpha > 0$ . Para ello, a su vez, por regularidad, basta demostrar que  $\mu(K) = 0$  para todo subconjunto compacto  $K$  de  $\mathcal{A}_\alpha$ .

Fijemos  $\varepsilon > 0$ . Puesto que  $K \subseteq \mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{A}$ , se sigue que  $|K| = 0$ . Por tanto, existe un conjunto abierto  $V$  tal que  $K \subset V$  y  $|V| < \varepsilon$ .

Ahora, para cada  $x \in K$ , podemos encontrar un radio  $r_x > 0$  tal que

$$\frac{\mu(B_d(x, r_x))}{|B_d(x, r_x)|} < \alpha \quad \text{y} \quad B_d(x, r_x/3) \subset V.$$

La familia  $\{B_d(x, r_x/3) : x \in K\}$  cubre a  $K$ , y por tanto podemos extraer un subrecubrimiento finito  $\Phi$ . Ahora, usando un lema "tipo Vitali" (ver, por ejemplo, [R2, Lema 5.2.3]), podemos encontrar una subfamilia  $\Gamma$  de  $\Phi$  disjunta y tal que

$$K \subseteq \bigcup_{\Gamma} B_d(x_i, r_{x_i}).$$

Observemos ahora que (ver, por ejemplo, [R2, Proposición 5.1.4])

$$\Theta_d \stackrel{\text{def}}{=} \sup_x \frac{|B_d(x, r_x)|}{|B_d(x, r_x/3)|} < \infty.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mu(K) &\leq \sum_{\Gamma} \mu(B_d(x_i, r_{x_i})) \\ &< \alpha \sum_{\Gamma} |B_d(x_i, r_{x_i})| \\ &< \Theta_d \alpha \sum_{\Gamma} |B_d(x_i, r_{x_i}/3)| \\ &\leq \Theta_d \alpha |V| < \Theta_d \alpha \varepsilon, \end{aligned}$$

con lo que, como  $\varepsilon > 0$  era arbitrario, se sigue que  $\mu(K) = 0$ . ■

**DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1.** Demostraremos solamente (2.4), puesto que la prueba de (2.3) es similar.

Podemos suponer que  $E$  es un subconjunto cerrado de  $\partial\Delta$  y que  $M_\alpha(E) > 0$ . Entonces (ver, por ejemplo, [T, p. 64]), existe una medida positiva y finita tal que:

- a)  $\|\mu\| = \mu(E) = M_\alpha(E)$ ,
- b)  $\mu(I) \leq C_\alpha |I|^\alpha$ , para cualquier subarco abierto  $I \subseteq \partial\Delta$ ,

donde  $C_\alpha$  es una constante independiente de  $E$ .

Dado  $z = re^{i\varphi}$  ( $r < 1$ ) denotemos por  $I_z$  el intervalo (arco) abierto en  $\partial\Delta$  con centro  $e^{i\varphi}$  tal que  $|I_z| = 1 - |z|$ . Sea  $n = n(z)$  el primer número natural tal que  $2^n |I_z| \geq 2\pi$ , es decir

$$n = \left\lceil \log_2 \frac{2\pi}{1 - |z|} \right\rceil + 1,$$

donde  $[\cdot]$  denota la función "parte entera". Los intervalos "doblados" (todos con centro  $e^{i\varphi}$ )  $I_z, 2I_z, \dots, 2^n I_z$  cubren  $\partial\Delta$  y, por tanto, usando b)

$$\begin{aligned}
 P_\mu(z) &\leq \sum_{k=1}^n \int_{2^k I_z \setminus 2^{k-1} I_z} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} d\mu(\theta) + \int_{I_z} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} d\mu(\theta) \\
 &\leq \sum_{k=1}^n \frac{2(1 - |z|)}{C(2^{k-1}(1 - |z|))^2} \int_{2^k I_z} d\mu(\theta) + \int_{I_z} \frac{2(1 - |z|)}{1 - |z|^2} d\mu(\theta) \\
 &\leq \frac{C}{1 - |z|} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{2k-1}} \mu(2^k I_z) + 2\mu(I_z) \right) \\
 &\leq \frac{C_\alpha}{(1 - |z|)^{1-\alpha}} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{(2-\alpha)k}} + 1 \right) \\
 &\leq \frac{C_\alpha}{(1 - |z|)^{1-\alpha}},
 \end{aligned}$$

puesto que la serie  $\sum_{k=1}^\infty 2^{(\alpha-2)k}$  es convergente ( $0 < \alpha \leq 1$ ). Así pues,

$$(2.7) \quad P_\mu(z) \leq \frac{C_\alpha}{(1 - |z|)^{1-\alpha}}, \quad (z \in \Delta),$$

con  $C_\alpha$  una nueva constante.

Sea ahora  $\nu' \geq 0$  una medida en  $\mathbb{S}_n$  tal que  $P_\mu \circ f = Q_{\nu'}$ . El lema de Schwarz (ver, por ejemplo, [R2, Teorema 8.1.2]) y (2.7) nos dan la misma desigualdad para  $\nu'$ ,

$$(2.8) \quad \begin{aligned} Q_{\nu'}(z) &= P_\mu(f(z)) \\ &\leq \frac{C_\alpha}{(1 - |f(z)|)^{1-\alpha}} \leq \frac{C_\alpha}{(1 - \|z\|)^{1-\alpha}}, \quad (z \in \mathbb{B}_n). \end{aligned}$$

Ahora hacemos la siguiente afirmación:

$$(2.9) \quad Q_{\nu'}(z) \geq C_n \frac{\nu'(B_d(\xi, (2(1 - \|z\|))^{1/2}))}{(1 - \|z\|)^n}, \quad (z \in \mathbb{B}_n),$$

donde  $\xi = z/\|z\|$  y  $B_d(\xi, R)$  denota la  $d$ -bola con centro  $\xi$  y radio  $R$ .

Suponiendo probado (2.9), obtenemos que

$$(2.10) \quad \nu'(B_d(\xi, R)) \leq C_{n,\alpha} R^{2(n-1+\alpha)}, \quad (\xi \in \mathbb{S}_n, R > 0),$$

por (2.8).

Por tanto, si cubrimos el conjunto  $A' \cup B'$  (ver Lema 2.1) con  $d$ -bolas de radios  $R_i$ , vemos por (2.10) que

$$\nu'(A' \cup B') \leq C_{n,\alpha} \sum_i R_i^{2(n-1+\alpha)},$$

y, por tanto, que

$$\|\nu'\| = \nu'(A' \cup B') \leq C_{n,\alpha} \mathcal{M}_{2(n-1+\alpha)}(A' \cup B') \leq C_{n,\alpha} \mathcal{M}_{2(n-1+\alpha)}(f^{-1}(E)).$$

Pero, puesto que  $f(0) = 0$ ,

$$M_\alpha(E) = \|\mu\| = P_\mu(0) = P_\mu(f(0)) = Q_{\nu'}(0) = \|\nu'\| \leq C_{n,\alpha} \mathcal{M}_{2(n-1+\alpha)}(f^{-1}(E)).$$

Por tanto, para terminar la demostración de (2.4), solo nos queda por probar (2.9). Observemos que, para ello, podemos suponer que  $\xi = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$  puesto que  $d$  es invariante bajo las transformaciones unitarias de  $\mathbb{S}_n$  para el producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Ahora, si  $z = re_1$ , pongamos  $R^2 = 2(1-r)$ . Si  $\eta \in B_d(e_1, R)$ , entonces

$$\|1 - r\eta_1\| \leq \|1 - \eta_1\| + \|\eta_1\|(1-r) \leq 3(1-r),$$

donde  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ .

Por tanto, si  $\eta \in B_d(e_1, R)$

$$Q(\eta, z) = \left( \frac{1-r^2}{\|1-r\eta_1\|^2} \right)^n \geq \frac{9^{-n}}{(1-r)^n}.$$

Puesto que  $Q$  es invariante bajo la acción del grupo unitario para el producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  en  $\mathbb{S}_n$ , obtenemos que si  $z = r\xi$  y  $\eta \in B_d(\xi, R)$ , entonces

$$Q(\eta, z) \geq \frac{9^{-n}}{(1-r)^n}.$$

Finalmente,

$$Q_{\nu'}(z) \geq \int_{B_d(\xi, R)} Q(\eta, z) d\nu'(\eta) \geq 9^{-n} \frac{\nu'(B_d(\xi, R))}{(1-r)^n},$$

lo que prueba (2.9).

La prueba de (2.6) es ahora una simple consecuencia de (2.4) y del hecho de que

$$\text{Dim}(A) = \sup\{\alpha : \mathcal{M}_\alpha(A) > 0\}.$$

En efecto, si  $\alpha < \text{Dim}(E)$ , entonces  $\mathcal{M}_\alpha(E) > 0$ , y por (2.4),  $\mathcal{M}_{2(n-1+\alpha)}(f^{-1}(E)) > 0$ . Se sigue que

$$\text{Dim}(f^{-1}(E)) \geq 2n - 2 + 2\alpha.$$

Como  $\alpha < \text{Dim}(E)$  era arbitrario, (2.6) se obtiene haciendo  $\alpha \rightarrow \text{Dim}(E)$ . Análogamente, (2.5) es consecuencia de (2.3). ■

OBSERVACIÓN. Si  $n > 1$ , el Teorema 1 nos dice que para cualquier boreliano  $E \subseteq \partial\Delta$ ,

$$\text{Dim}(f^{-1}(E)) \geq 2n - 2 > 0.$$

En particular, tomando  $E$  unitario, deducimos que  $f^{-1}(E) \neq \emptyset$ , y por tanto que  $f : \partial\mathbb{B}_n \rightarrow \partial\Delta$  es sobreyectiva, esto es ¡ $f$  toma todos los valores  $e^{i\varphi} \in \partial\Delta$ !

Sin embargo, esto no se deduce del Teorema 1, si  $n = 1$ . Más adelante veremos una prueba de que, también en este caso,  $f : \partial\Delta \rightarrow \partial\Delta$  es sobreyectiva (ver la Proposición 4.3).

En cualquier caso, la siguiente es una prueba de este hecho, válida en cualquier dimensión.

Sea  $f : \partial\mathbb{B}_n \rightarrow \partial\Delta$  una función interna. Es suficiente probar que  $f^{-1}(\{1\}) \neq \emptyset$ . Ahora bien, sea

$$(2.11) \quad u \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Re} \left( \frac{1+f}{1-f} \right) = \frac{1-|f|^2}{|1-f|^2} > 0, \quad \text{en } \mathbb{B}_n.$$

La función  $u$  es armónica y positiva en  $\mathbb{B}_n$ , y por tanto, existe una medida positiva en  $\mathbb{S}_n$  tal que

$$u = \operatorname{Re} \left( \frac{1+f}{1-f} \right) = P_\mu.$$

Por (2.11),  $P_\mu$  tiende radialmente a cero en casi todo punto con respecto a la medida de Lebesgue, puesto que  $f$  es interna; por el Teorema de Privalov (ver, por ejemplo, [R2, Teorema 5.5.9])  $f$  puede tomar el valor 1 como máximo en un conjunto de medida de Lebesgue nula. Por tanto, la derivada de Radon-Nikodym de  $\mu$  con respecto a la medida de Lebesgue es cero en casi todo punto, de donde  $\mu$  es una medida singular. Se sigue, por el Lema 2.2, que  $P_\mu \rightarrow +\infty$ , cuando  $r \rightarrow 1$ , en un conjunto de  $\mu$ -medida plena. Pero, ¡ $f(re^{i\theta}) \rightarrow 1$ , cuando  $r \rightarrow 1$ , en ese conjunto!

■

### 2.3. Un ejemplo en dimensión $n = 1$ .

En esta sección mostramos con un ejemplo que, al menos si  $n = 1$ , las desigualdades del Teorema 1 no pueden invertirse. De hecho ¡en (2.5) puede ocurrir que los dos miembros sean lo más diferentes posible!, es decir, la desigualdad (2.5) puede ser máxima.

EJEMPLO. Consideremos la función interna singular  $F(z) = e^{-(1+z)/(1-z)}$  y sea

$$E = F^{-1} \left( \left\{ \frac{1}{2^n}, n = 1, 2, 3, \dots \right\} \right) \cup \{0\}.$$

Si  $H$  es una aplicación de recubrimiento universal de  $\Delta$  sobre  $\Delta \setminus E$ , entonces  $H$  es interna y

$$\operatorname{Dim}(H^{-1}(\{1\})) = 1 > 0 = \operatorname{Dim}(\{1\}).$$



DEMOSTRACIÓN. Observemos, en primer lugar, que  $E$  sólo se acumula en 1. Por otro lado, puesto que  $E$  es numerable, tiene capacidad logarítmica nula y, por tanto,  $H$  es interna [CL, p. 37]. Sea

$$A = \{e^{i\varphi} : \lim_{r \rightarrow 1} (F \circ H)(re^{i\varphi}) = 0\}.$$

Puesto que si  $F(H(re^{i\varphi})) \rightarrow 0$ , cuando  $r \rightarrow 1$ , entonces forzosamente  $H(re^{i\varphi}) \rightarrow 1$ , se sigue que  $A \subseteq H^{-1}(\{1\})$ . Por tanto, para terminar, es suficiente que verifiquemos que

$$\text{Dim}(A) = 1.$$

Observemos que  $F \circ H$  es una aplicación de recubrimiento universal de

$$\Delta \setminus \left\{ \frac{1}{2^n}, n = 1, 2, 3, \dots \right\} \setminus \{0\}.$$

En particular, puesto que  $F \circ H$  es una función interna sin ceros, se sigue que  $F \circ H$  es una función interna singular, es decir,

$$F(H(z)) = e^{i\psi} \exp \left( - \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta) \right),$$

donde  $\mu$  es una cierta medida singular soportada en  $\partial\Delta$ . Por tanto,

$$(2.12) \quad \log |F \circ H| = -P_\mu.$$

Sea

$$g(z) = \frac{1}{F(H(z))}.$$

Entonces,  $g$  es holomorfa en  $\Delta$  y omite los puntos  $\{2^n : n = 1, 2, \dots\}$ . Por un teorema de Littlewood [Li, p. 228], concluimos que para ciertas constantes  $C > 0$ ,  $b > 2$ ,

$$|g(z)| \leq \frac{C}{(1 - |z|)^b}, \quad z \in \Delta.$$

Se sigue que

$$(2.13) \quad |P_\mu(z)| \leq b \log \frac{1}{1 - |z|} + \log C, \quad z \in \Delta.$$

Por otro lado, si denotamos, como antes, por  $I_z$  el intervalo en  $\partial\Delta$  con centro  $z/|z| = e^{i\varphi}$  y radio  $1 - |z|$ , se tiene que

$$(2.14) \quad P_\mu(z) \geq \int_{I_z} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} d\mu(\theta) \geq C \frac{\mu(I_z)}{1 - |z|}.$$

Por (2.13) y (2.14),

$$\mu(I_z) \leq C(1 - |z|)^{1-\alpha}, \quad \text{para todo } 0 < \alpha < 1.$$

Esto nos dice que

$$\mu(B(\xi, R)) \leq C R^\beta, \quad \text{para todo } 0 < \beta < 1,$$

de donde deducimos que todo conjunto  $X \subseteq \partial\Delta$  de  $\mu$ -medida positiva tiene dimensión de Hausdorff 1, puesto que para todo  $\beta$  con  $0 < \beta < 1$  y todo recubrimiento  $\{B(\xi_i, R_i)\}$  de  $X$ ,

$$0 < \mu(X) \leq \sum_i \mu(B(\xi_i, R_i)) \leq C \sum_i R_i^\beta,$$

con lo que  $M_\beta(X) \geq \mu(X) > 0$ .

Ahora bien, puesto que, por el Lema 2.2,  $P_\mu(re^{i\theta}) \rightarrow +\infty$ , c.t.p.  $\mu$ , se deduce que  $\mu(A) = \|\mu\|$  en virtud de (2.12). Por tanto  $\text{Dim}(A) = 1$ . ■

## Capítulo 3

### Distorsión de la capacidad de conjuntos frontera

En este capítulo extendemos el lema de Löwner a dimensiones fraccionarias por un método alternativo al del Capítulo 2. Puesto que la dimensión capacitaria coincide con la dimensión de Hausdorff es de esperar que la desigualdad (2.5) pueda obtenerse también cuantificando cómo distorsiona una función (univalente ó interna) la  $\alpha$ -capacidad. Por otro lado, esta aproximación al problema tiene ventajas inherentes puesto que, como veremos en el Capítulo 4, al menos en dimensión dos, podremos obtener información adicional sobre la dinámica del comportamiento de una función interna.

El capítulo se estructura de la siguiente manera; la primera sección contiene las extensiones capacitarias del lema de Löwner para funciones univalentes debidas a Ch. Pommerenke [P1] y a D. Hamilton [D1]. En la segunda sección probaremos las extensiones análogas para el caso de funciones internas. La prueba consiste, básicamente, en reducirla a probar una expresión integral para la  $\alpha$ -energía, en términos de la extensión de Poisson de la medida. Por otro lado, hemos dividido la Sección 2 en dos partes; en la primera se enuncia y se prueba el teorema de distorsión capacitaria en dimensión dos y en la segunda en cualquier dimensión (compleja). La razón de tal proceder es doble; en primer lugar el teorema es "sharp" en dimensión dos; en segundo lugar, aunque el teorema general incluye al de dimensión dos, las ideas básicas involucradas se ven mejor en el caso  $n = 1$  y además, en este caso, la prueba usa técnicas de variable compleja, mientras que en el caso general las técnicas usadas son esencialmente reales. Más concretamente, un ingrediente fundamental va a ser el cálculo de los coeficientes de Fourier del núcleo capacitario. En dimensión dos, podemos usar los polinomios ortogonales clásicos  $\{e^{ikt}\}_{k=-\infty}^{k=+\infty}$ , pero en dimensión superior necesitaremos sustituirlos por ciertos armónicos esféricos. Finalmente en la Sección 3 daremos algunas aplicaciones de la expresión integral de

la  $\alpha$ -energía obtenida en la Sección 2. En resumen, las secciones del Capítulo son

- 3.1. Funciones univalentes:  
Teoremas de Pommerenke y Hamilton.
- 3.2. Funciones internas.
  - 3.2.1. El teorema de distorsión capacitaria para funciones internas clásicas.
  - 3.2.2. El teorema de distorsión capacitaria para funciones internas en la bola unidad de  $\mathbb{C}^n$ .
- 3.3. Aplicaciones de la expresión integral de la energía.

### 3.1. Funciones univalentes: Teoremas de Pommerenke y Hamilton.

Ingrediente fundamental de la prueba del Teorema de Pommerenke es la siguiente desigualdad debida a Z. Nehari.

**Lema 3.1.** (Z. Nehari, [Ne]). *Sea  $f : \Delta \longrightarrow \Delta$  univalente con  $f(0) = 0$ . Entonces,*

$$(3.1) \quad \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^n \left| f'(0) \frac{z_j z_k}{f(z_j) f(z_k)} \frac{f(z_j) - f(z_k)}{z_j - z_k} (1 - f(z_j) \overline{f(z_k)}) \right|^{\gamma_j \gamma_k} \geq \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^n |1 - z_j \bar{z}_k|^{\gamma_j \gamma_k},$$

ó, equivalentemente,

$$(3.2) \quad 0 \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \gamma_j \gamma_k \log \left| \frac{f'(0) z_j z_k}{f(z_j) f(z_k)} \frac{f(z_j) - f(z_k)}{z_j - z_k} \frac{1 - f(z_j) \overline{f(z_k)}}{1 - z_j \bar{z}_k} \right|,$$

para toda elección de  $z_1, \dots, z_n \in \Delta$ ,  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

La ventaja de la expresión (3.1) de la desigualdad, frente a la más usual (3.2), es que se adapta mejor al cálculo de capacidades logarítmicas en vista de su coincidencia con el diámetro transfinito.

El teorema que sigue, debido a Ch. Pommerenke (1.968), muestra cómo distorsiona una función univalente la capacidad logarítmica de conjuntos frontera. Además, como veremos, constituye el punto de partida para probar el resultado de distorsión análogo para  $\alpha$ -capacidades.

**Teorema B** (Ch. Pommerenke, [P1, p. 348], [P3]) Sea  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  una función univalente con  $f(0) = 0$ . Si  $A$  es un boreliano en  $\partial\Delta$ , y denotamos por  $f(A)$  el conjunto de límites radiales  $f(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$ ,  $e^{i\theta} \in A$ , y por

$$\tilde{E} = \left\{ \frac{1}{\bar{w}} : w \in E \right\}, \quad E \subseteq \overline{\Delta},$$

entonces,

$$(3.3) \quad \text{cap}_0(f(A) \cup \widetilde{f(A)}) \geq |f'(0)|^{-1/2} \text{cap}_0(A).$$

En particular, si  $f(A) \subseteq \partial\Delta$ , entonces

$$\text{cap}_0(f(A)) \geq |f'(0)|^{-1/2} \text{cap}_0(A) \geq \text{cap}_0(A),$$

puesto que  $|f'(0)| \leq 1$ , en virtud del lema de Schwarz.

OBSERVACIÓN.  $f(A)$  está definido salvo para un conjunto de  $\theta$ 's de capacidad logarítmica nula [P1, Teorema 11.5].

DEMOSTRACIÓN. Sea  $B \subseteq \{R \leq |z| \leq r\}$  compacto ( $0 < R < r < 1$ ), y sea  $F = f(B) \cup \widetilde{f(B)}$ . Por tanto,  $F$  es un compacto en  $\mathbb{C}$ . Sean  $z_1, \dots, z_n$  los puntos de Fekete de  $B$  de orden  $n$  y pongamos  $w_j = f(z_j)$ . Aplicando la desigualdad de Nehari (3.1) con  $\gamma_1 = \dots = \gamma_n = \sqrt{2}$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} & |f'(0)|^{2n^2} \prod_{j \neq k} |w_j - w_k| \frac{|w_j - w_k|}{|w_j| |w_k|} \frac{|1 - w_j \bar{w}_k|}{|w_j|} \frac{|1 - w_j \bar{w}_k|}{|w_k|} \frac{1}{|z_j - z_k|^2} \\ & \cdot \prod_{j=1}^n |f'(z_j)|^2 \frac{(1 - |w_j|^2)^2}{|w_j|^4} \\ & \geq \prod_{j \neq k} \frac{|1 - z_j \bar{z}_k|^2}{|z_j|^2 |z_k|^2} \prod_{j=1}^n \frac{(1 - |z_j|^2)^2}{|z_j|^4}. \end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned} & |f'(0)|^{2n^2} \prod_{j \neq k} |w_j - w_k| \left| \frac{1}{\bar{w}_j} - \frac{1}{\bar{w}_k} \right| \left| w_k - \frac{1}{\bar{w}_j} \right| \left| w_j - \frac{1}{\bar{w}_k} \right| \prod_{j=1}^n \left| w_j - \frac{1}{\bar{w}_j} \right|^2 \\ (3.4) \quad & \geq \prod_{j \neq k} \frac{|1 - z_j \bar{z}_k|^2 |z_j - z_k|^2}{|z_j|^2 |z_k|^2} \prod_{j=1}^n (1 - |z_j|^2)^2 \left| \frac{f(z_j)}{z_j^2 f'(z_j)} \right|^2. \end{aligned}$$

Ahora, por el teorema de distorsión de Koebe,

$$\left| \frac{z_j f'(z_j)}{f(z_j)} \right| \leq \frac{1 + |z_j|}{1 - |z_j|},$$

con lo que

$$(3.5) \quad (1 - |z_j|^2)^2 \left| \frac{f(z_j)}{z_j^2 f'(z_j)} \right|^2 \geq \frac{(1 - |z_j|)^4}{|z_j|^2} > (1 - |z_j|)^4 \geq (1 - r)^4.$$

Por otro lado,

$$(3.6) \quad \prod_{j \neq k} \frac{|1 - z_j \bar{z}_k|^2 |z_j - z_k|^2}{|z_j|^2 |z_k|^2} > \prod_{j \neq k} |1 - z_j \bar{z}_k|^2 |z_j - z_k|^2 \\ \geq \prod_{j \neq k} |z_j - z_k|^4,$$

puesto que

$$\left| \frac{z_j - z_k}{1 - z_j \bar{z}_k} \right| < 1.$$

Por tanto, puesto que  $w_j, 1/\bar{w}_j \in F$ , su  $2n$ -diámetro  $D_{2n}(F)$  es

$$D_{2n}(F) \geq \prod_{j \neq k} |w_j - w_k| \left| \frac{1}{\bar{w}_j} - \frac{1}{\bar{w}_k} \right| \left| w_k - \frac{1}{\bar{w}_j} \right| \left| w_j - \frac{1}{\bar{w}_k} \right| \prod_{j=1}^n \left| w_j - \frac{1}{\bar{w}_j} \right|^2,$$

con lo que, por (3.4), (3.5) y (3.6),

$$|f'(0)|^{2n^2} D_{2n}(F) \geq (1 - r)^{4n} \prod_{j \neq k} |z_j - z_k|^4 \\ = (1 - r)^{4n} (D_n(B))^4.$$

Tomando la raíz de índice  $2n(2n-1)$  y pasando al límite cuando  $n \rightarrow \infty$ , obtenemos que

$$(3.7) \quad |f'(0)|^{1/2} \text{cap}_0(F) \geq \text{cap}_0(B),$$

que es la versión de (3.3) para subconjuntos compactos de  $\Delta$ . Ahora, para obtener (3.3), la idea es pasar al límite cuando  $r \rightarrow 1$  en la desigualdad (3.7).

Dado  $\varepsilon > 0$ , elijamos un conjunto abierto  $H$  tal que

$$f(A) \subseteq H, \quad \text{cap}_0(H \cup \tilde{H}) < \text{cap}_0(f(A) \cup \widetilde{f(A)}) + \varepsilon.$$

Por la definición de  $f(A)$ , para cada  $\xi \in A$  (salvo, a lo sumo, en un conjunto de capacidad logarítmica nula, que no influye) existe un  $r = r(\xi) < 1$  tal que  $f(r(\xi)\xi) \in H$ . Por tanto, por continuidad,

$$(3.8) \quad f(r(\xi)\xi) \in H, \quad \text{para } z \in \overline{U(\xi)}, \xi \in A,$$

donde  $U(\xi) = \{z \in \partial\Delta : |z - \xi| < \delta(\xi)\}$  con  $\delta(\xi)$  suficientemente pequeño. El conjunto  $V = \bigcup_{\xi \in A} U(\xi)$  es un abierto relativo de  $\partial\Delta$  y contiene a  $A$ .

Sea ahora  $B'$  un subconjunto compacto de  $V$ . Entonces, por compacidad,

$$B' \subseteq U(\xi_1) \cup \cdots \cup U(\xi_m),$$

para ciertos  $\xi_1, \dots, \xi_m \in A$ . El conjunto

$$B = \bigcup_{k=1}^m \{r(\xi_k)z : z \in \overline{U(\xi_k)}\} \subseteq \Delta$$

es compacto y su proyección  $B^*$  sobre  $\partial\Delta$  contiene a  $B'$ . Puesto que  $f(B) \subseteq H$  (por (3.8)), usando (3.7),

$$\begin{aligned} \text{cap}_0(B') &\leq \text{cap}_0(B^*) \leq \text{cap}_0(B) \\ &\leq |f'(0)|^{1/2} \text{cap}_0(f(B) \cup \widetilde{f(B)}) \\ &\leq |f'(0)|^{1/2} \text{cap}_0(H \cup \widetilde{H}) \\ &< |f'(0)|^{1/2} (\text{cap}_0(f(A) \cup \widetilde{f(A)}) + \varepsilon) \end{aligned}$$

y el teorema está probado puesto que  $\varepsilon > 0$  era arbitrario. ■

En 1.988, D. Hamilton logró extender el lema de Löwner para funciones univalentes a dimensiones fraccionarias, usando  $\alpha$ -capacidades, más o menos en la misma época en que N. G. Makarov probó la correspondiente extensión usando el  $\alpha$ -contenido (Teorema A).

**Teorema C** (D. Hamilton, [D1]). *Sea  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  una función univalente con  $f(0) = 0$ . Si  $E \subseteq \partial\Delta$  es un boreliano tal que  $f(E) \subseteq \partial\Delta$ , entonces, para  $0 < \alpha < 1$ ,*

$$(3.9) \quad \text{cap}_\alpha(f(E)) \geq |f'(0)|^{-\alpha/2} \text{cap}_\alpha(E) \geq \text{cap}_\alpha(E).$$

y si  $\alpha = 0$ ,

$$\text{cap}_0(f(E)) \geq |f'(0)|^{-1/2} \text{cap}_0(E) \geq \text{cap}_0(E).$$

*En particular, si  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  es cualquier función univalente y  $E \subseteq \partial\Delta$  es tal que  $f(E) \subseteq \partial\Delta$ , entonces*

$$\text{Dim}(f(E)) \geq \text{Dim}(E).$$

Obsérvese que el Teorema C incluye al Teorema B (si  $f(E) \subset \partial\Delta$ ). Sin embargo, el punto de partida de la prueba consiste, esencialmente, en demostrar una desigualdad (ver (3.10)) entre las energías logarítmicas de una medida y de su medida imagen por  $f$ , que puede considerarse una versión alternativa de (3.7). Tal

desigualdad implica, por un lado, el Teorema B en el caso  $\alpha = 0$  y, por otro, el caso  $0 < \alpha < 1$  por "exponenciación" de dicha desigualdad.

**IDEA DE LA DEMOSTRACIÓN.** La idea es fácil de explicar en el caso en el que  $f$  puede extenderse a  $\bar{\Delta}$  y si nos olvidamos del factor  $|f'(0)|^{-\alpha/2}$ . En primer lugar la desigualdad de Nehari (Lema 3.1) puede transformarse en

$$(3.10) \quad \iint_{E \times E} \log \frac{1}{|f(x) - f(y)|} d\mu(x) d\mu(y) \leq \iint_{E \times E} \log \frac{1}{|x - y|} d\mu(x) d\mu(y),$$

donde  $E \subseteq \partial\Delta$  es aplicado sobre  $\partial\Delta$  y  $\mu$  es cualquier medida real soportada en  $E$  con energía logarítmica finita (tales medidas existen si  $\text{cap}_0(E) > 0$ ; en caso contrario no hay nada que probar),

$$\iint_{E \times E} \log \frac{1}{|x - y|} d\mu(x) d\mu(y) < +\infty.$$

Ahora, como  $E, f(E) \subseteq \partial\Delta$ , los núcleos en (3.10) son semidefinidos positivos con lo que podemos usar un lema de Schur para "exponenciar" (3.10), a saber:

**Lema 3.2** (Schur). *Supongamos que  $A, B$  son funciones reales simétricas definidas en  $\bar{\Delta} \times \bar{\Delta}$  y continuas excepto en la diagonal. Supongamos además que cumplen*

$$|A(x, y)| + |B(x, y)| \leq C \log \frac{1}{|x - y|}.$$

si  $(x, y) \in \bar{\Delta} \times \bar{\Delta} \setminus \{\text{diagonal}\}$ ,

$$\iint_{\bar{\Delta} \times \bar{\Delta}} A(x, y) d\mu(x) d\mu(y) \geq 0,$$

$$\iint_{\bar{\Delta} \times \bar{\Delta}} B(x, y) d\mu(x) d\mu(y) \geq 0,$$

para toda medida real soportada en  $\bar{\Delta}$ , y

$$\iint_{\bar{\Delta} \times \bar{\Delta}} B(x, y) d\mu(x) d\mu(y) \geq \iint_{\bar{\Delta} \times \bar{\Delta}} A(x, y) d\mu(x) d\mu(y).$$

Entonces, si  $h$  es una función absolutamente monótona (es decir,  $h, h', h'', \dots$  son positivas) tal que

$$h\left(\log \frac{1}{|z|}\right) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2),$$



tenemos que

$$\iint_{\overline{\Delta} \times \overline{\Delta}} h(B(x, y)) d\mu(x) d\mu(y) \geq \iint_{\overline{\Delta} \times \overline{\Delta}} h(A(x, y)) d\mu(x) d\mu(y),$$

para toda medida real, soportada en  $\Delta$ , con energía finita,

$$\iint_{\overline{\Delta} \times \overline{\Delta}} h\left(\log \frac{1}{|x - y|}\right) d\mu(x) d\mu(y) < +\infty.$$

Tomando  $h(t) = e^{\alpha t}$ , el lema de Schur aplicado a (3.10) nos da

$$(3.11) \quad \iint_{\partial\Delta \times \partial\Delta} \frac{1}{|f(x) - f(y)|^\alpha} d\mu(x) d\mu(y) \leq \iint_{\partial\Delta \times \partial\Delta} \frac{1}{|x - y|^\alpha} d\mu(x) d\mu(y),$$

para todas las medidas  $\mu$  soportadas en  $E$  con  $\alpha$ -energía finita, es decir, tales que

$$\iint_{E \times E} \frac{1}{|x - y|^\alpha} d\mu(x) d\mu(y) < +\infty.$$

Tomemos ahora una sucesión  $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$  de medidas de probabilidad tales que

$$I_\alpha(\mu_n) = \iint_{\overline{\Delta} \times \overline{\Delta}} \frac{1}{|x - y|^\alpha} d\mu_n(x) d\mu_n(y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{cap}_\alpha(E)}.$$

Si  $\nu_n$  denota la medida imagen de  $\mu_n$  por  $f$ , i.e.

$$\nu_n(A) = \mu_n(f^{-1}(A)),$$

para todo boreliano  $A \subseteq \overline{\Delta}$ , (3.11) de hecho nos dice que

$$I_\alpha(\nu_n) \leq I_\alpha(\mu_n), \quad \text{para todo } n.$$

y puesto que las  $\nu_n$  son medidas de probabilidad que le dan masa 1 a  $f(E)$ , tenemos finalmente que

$$\frac{1}{\text{cap}_\alpha(f(E))} \leq I_\alpha(\nu_n) \leq I_\alpha(\mu_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{cap}_\alpha(E)},$$

de donde,  $\text{cap}_\alpha(f(E)) \geq \text{cap}_\alpha(E)$ .

El caso general (y la ganancia del factor  $|f'(0)|^{-\alpha/2}$ ) es más complicado. La idea es aproximar  $E$  por conjuntos en  $\Delta$  (como en la demostración del Teorema B) y tener cuidado con el hecho de que ahora no todos los núcleos involucrados son semidefinidos positivos. ■

### 3.2. Funciones internas.

#### 3.2.1. El teorema de distorsión capacitaria para funciones internas clásicas.

En este caso hemos podido probar el siguiente teorema que incluye un fuerte enunciado de unicidad. Conviene resaltar aquí que la desigualdad (3.12) fue establecida en [FP] con una cierta constancia  $C_\alpha$ . D. Hamilton conjeturó en [H2] que la constante correcta debía ser  $C_\alpha = 1$ , como así resultó ser [FPR].

**Teorema 2** ([FP], [FPR]) *Si  $f : \Delta \longrightarrow \Delta$  es una función interna con  $f(0) = 0$  y si  $E$  es un boreliano en  $\partial\Delta$ , entonces para todo  $\alpha$  con  $0 \leq \alpha < 1$ ,*

$$(3.12) \quad \text{cap}_\alpha(f^{-1}(E)) \geq \text{cap}_\alpha(E).$$

*Además, si  $\text{cap}_\alpha(E) > 0$ , entonces en (3.12) sólo puede ocurrir la igualdad si o bien  $f$  es una rotación, o bien  $\text{cap}_\alpha(E) = \text{cap}_\alpha(\partial\Delta)$ .*

*En particular, de (3.12) se sigue que para cualquier función interna y cualquier boreliano de  $\partial\Delta$ ,*

$$\text{Dim}(f^{-1}(E)) \geq \text{Dim}(E).$$

Como ya vimos en el Capítulo 1, si  $f$  no es una rotación,  $f$  es ergódica, esto es, no existen subconjuntos no triviales e invariantes por  $f$ . Pues bien, el Teorema 2 tiene como consecuencia el sugerente resultado de que esto también es cierto con  $\alpha$ -capacidades.

**Corolario.** *Si  $f : \Delta \longrightarrow \Delta$  es interna,  $f(0) = 0$ , y  $f$  no es una rotación, entonces si  $E$  es un boreliano de  $\partial\Delta$  tal que la diferencia simétrica entre  $E$  y  $f^{-1}(E)$  tiene  $\alpha$ -capacidad cero ( $0 \leq \alpha < 1$ ), entonces, o bien  $\text{cap}_\alpha(E) = 0$ , o bien  $\text{cap}_\alpha(E) = \text{cap}_\alpha(\partial\Delta)$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Si la diferencia simétrica entre  $E$  y  $f^{-1}(E)$  tiene  $\alpha$ -capacidad nula, entonces por la monotonicidad de la  $\alpha$ -capacidad

$$\text{cap}_\alpha(E \setminus f^{-1}(E)) = 0 \quad \text{y} \quad \text{cap}_\alpha(f^{-1}(E) \setminus E) = 0.$$

Por otro lado, por subaditividad,

$$\text{cap}_\alpha(f^{-1}(E)) \leq \text{cap}_\alpha(f^{-1}(E) \cap E) + \text{cap}_\alpha(f^{-1}(E) \setminus E) \leq \text{cap}_\alpha(E),$$

si  $0 < \alpha < 1$ , y

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log \frac{1}{\text{cap}_0(f^{-1}(E))}} &\leq \frac{1}{\log \frac{1}{\text{cap}_0(f^{-1}(E) \cap E)}} + \frac{1}{\log \frac{1}{\text{cap}_0(f^{-1}(E) \setminus E)}} \\ &\leq \frac{1}{\log \frac{1}{\text{cap}_0(E)}} , \end{aligned}$$

es decir,

$$\text{cap}_0(f^{-1}(E)) \leq \text{cap}_0(E).$$

Por (3.12), esto implica que

$$\text{cap}_\alpha(f^{-1}(E)) = \text{cap}_\alpha(E), \quad 0 \leq \alpha < 1.$$

Así, si  $\text{cap}_\alpha(E) > 0$ , como  $f$  no es una rotación, se sigue del Teorema 2 que  $\text{cap}_\alpha(E) = \text{cap}_\alpha(\partial\Delta)$ . ■

Necesitaremos algunos lemas para probar el Teorema 2.

**Lema 3.3.** *Sea  $\mu$  una medida finita y positiva en  $\partial\Delta$ , y sea  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  una función interna. Entonces, existe una única medida positiva  $\nu$  en  $\partial\Delta$  tal que  $P_\mu \circ f = P_\nu$  y*

$$\nu(f^{-1}(\text{soporte}(\mu))) = \nu(\partial\Delta).$$

*Si, además,  $f(0) = 0$ , entonces  $\|\nu\| = \|\mu\|$ .*

**OBSERVACIÓN.** Aquí  $\|\cdot\|$  denota la masa total de la medida. Por otro lado, en todo lo que sigue consideraremos el núcleo de Poisson normalizado.

**DEMOSTRACIÓN.** La primera parte del lema ya la vimos en el Lema 2.1. Si, además,  $f(0) = 0$ , entonces llamando  $E$  al soporte de  $\mu$ ,

$$\frac{\nu(f^{-1}(E))}{2\pi} = P_\nu(0) = P_\mu(f(0)) = P_\mu(0) = \frac{\mu(E)}{2\pi}.$$

Observemos que  $\nu$  es única, por ejemplo, porque  $P_\mu(f(re^{i\theta}))d\theta \rightarrow \nu$ , cuando  $r \rightarrow 1$ , en la topología débil-\*. ■

**Lema 3.4** (Principio de subordinación). *Sea  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  una función holomorfa tal que  $f(0) = 0$ , y sea  $v : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  una función subarmónica. Entonces,*

$$(3.13) \quad \int_0^{2\pi} v(f(re^{i\theta}))d\theta \leq \int_0^{2\pi} v(re^{i\theta})d\theta,$$

*para todo  $r \in (0, 1)$ . Además, la igualdad en (3.13) sólo puede darse para un  $r$  dado, si o bien  $v$  es armónica en  $\Delta_r = \{z \in \Delta : |z| < r\}$ , o bien  $f$  es una rotación.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $0 < r < 1$ . Sea  $u$  la función armónica en  $\Delta_r = \{|z| < r\}$  tal que  $u = v$  en  $\partial\Delta_r$ . Entonces, puesto que por el lema de Schwarz  $f$  aplica  $\overline{\Delta_r}$  en  $\overline{\Delta_r}$  y  $v \leq u$  en  $\overline{\Delta_r}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} v(f(re^{i\theta}))d\theta &\leq \int_0^{2\pi} u(f(re^{i\theta}))d\theta = 2\pi u(f(0)) \\ &= 2\pi u(0) = \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} v(re^{i\theta})d\theta, \end{aligned}$$

lo que prueba (3.13).

Observemos ahora que podemos tener igualdad en (3.13), para un  $r$  dado, si y sólo si

$$(3.14) \quad \int_0^{2\pi} v(f(re^{i\theta})) d\theta = \int_0^{2\pi} u(f(re^{i\theta})) d\theta.$$

Si  $\{f(re^{i\theta})\}_{0 \leq \theta < 2\pi} \subset \Delta_r$ , entonces  $v(f(re^{i\theta})) \leq u(f(re^{i\theta}))$  y, por (3.14)

$$v(f(re^{i\theta})) = u(f(re^{i\theta})), \quad \text{c.t.p. } \theta.$$

Pero entonces, por el principio del máximo, esto implica que  $v = u$  en  $\Delta_r$  y, por tanto, que  $v$  es armónica en  $\Delta_r$ .

Si existe un ángulo  $\theta$  tal que  $|f(re^{i\theta})| = r$ , entonces el lema de Schwarz nos dice que  $f$  es una rotación. ■

Veamos ahora la

**DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.** La prueba se basa en encontrar una expresión integral para la  $\alpha$ -energía en términos de la extensión de Poisson de  $\mu$  (ver el Teorema 3, más adelante). Una estimación para el caso  $\alpha = 0$ , aunque no una identidad, aparece en el artículo [B] de A. Beurling.

Supongamos que para cada  $\alpha \in [0, 1)$  existiera una función  $K_\alpha : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que

$$(3.15) \quad I_\alpha(\mu) = \iint_{\Delta} |P_\mu(z)|^2 K_\alpha(|z|) dx dy, \quad (0 < \alpha < 1),$$

y que

$$(3.16) \quad I_0(\mu) = \iint_{\Delta} \left| P_\mu(z) - \frac{1}{2\pi} \right|^2 K_0(|z|) dx dy,$$

donde  $P_\mu$  denota la extensión de Poisson (normalizada) de  $\mu$ .

$$P_\mu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} d\mu(\theta).$$

Para probar (3.12), podemos suponer que  $\text{cap}_\alpha(E) > 0$  y que  $E$  es cerrado. Sea  $\mu_e$  la  $\alpha$ -distribución de equilibrio de  $E$  y sea  $\nu$  la medida de probabilidad tal que  $P_\nu = P_{\mu_e}$  o  $f$  cuya existencia nos asegura el Lema 3.3. Por el principio de subordinación, puesto que  $|P_{\mu_e}|^2$  y  $|P_{\mu_e} - 1/(2\pi)|^2$  son subarmónicas, deducimos que

$$\int_0^{2\pi} \left| P_\nu - \frac{1}{2\pi} \right|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \left| P_{\mu_e}(f) - \frac{1}{2\pi} \right|^2 d\theta \leq \int_0^{2\pi} \left| P_{\mu_e} - \frac{1}{2\pi} \right|^2 d\theta,$$

y

$$\int_0^{2\pi} |P_\nu|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} |P_{\mu_e}(f)|^2 d\theta \leq \int_0^{2\pi} |P_{\mu_e}|^2 d\theta,$$

con lo que, en vista de (3.15) y (3.16), integrando estas desigualdades con respecto a  $r$ , después de multiplicar ambos miembros por el factor adecuado, obtenemos que

$$(3.17) \quad I_\alpha(\nu) \leq I_\alpha(\mu_e) = \frac{1}{\text{cap}_\alpha(E)}, \quad 0 \leq \alpha < 1.$$

Si  $f^{-1}(E)$  fuera cerrado habríamos terminado. Sin embargo, puesto que por el Lema 3.3,  $\nu(f^{-1}(E)) = 1$ , podemos soslayar fácilmente esta dificultad. En primer lugar,

$$I_\alpha(\nu) = \iint_{f^{-1}(E) \times f^{-1}(E)} \Phi_\alpha(|z - w|) d\nu(z) d\nu(w).$$

En segundo lugar, si  $\{K_n\}$  es una sucesión creciente de subconjuntos compactos de  $\partial\Delta$  tales que  $K_n \subseteq f^{-1}(E)$ ,  $\nu(K_n) \nearrow 1$ , el teorema de la convergencia monótona nos da que

$$\begin{aligned} I_\alpha(\nu) &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{cap}_\alpha(K_n)} = \inf_n \frac{1}{\text{cap}_\alpha(K_n)} \\ &\geq \frac{1}{\text{cap}_\alpha(f^{-1}(E))}, \quad 0 < \alpha < 1, \end{aligned}$$

que, con (3.17), implica (3.12), módulo probar la certeza de (3.15) y (3.16). La última cadena de desigualdades se ve de forma totalmente análoga en el caso  $\alpha = 0$ .

Probemos ahora el enunciado de igualdad del Teorema 2. Lo haremos primero en el caso en que  $E$  es cerrado. Lo hacemos así porque la prueba muestra más claramente las ideas que usaremos para demostrar el caso general.

Supongamos que  $0 < \alpha < 1$ . El caso  $\alpha = 0$  es similar. Hemos visto que si  $\text{cap}_\alpha(E) > 0$ , y  $\mu_e$  es su  $\alpha$ -distribución de equilibrio, entonces

$$\frac{1}{\text{cap}_\alpha(f^{-1}(E))} \leq I_\alpha(\nu) \leq I_\alpha(\mu_e) = \frac{1}{\text{cap}_\alpha(E)}.$$

Por tanto, si  $E$  y  $f^{-1}(E)$  tienen la misma  $\alpha$ -capacidad, entonces

$$I_\alpha(\nu) = I_\alpha(\mu_e),$$

y esto, en vista de (3.15), esto es posible si y sólo si para todo  $r \in (0, 1)$ ,

$$\int_0^{2\pi} |P_{\mu_e}|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} |P_{\mu_e}|^2 d\theta,$$

lo que significa que tenemos igualdad al aplicar el principio de subordinación (Lema 3.4). Por tanto, ó bien  $f$  es una rotación ó bien  $|P_{\mu_e}|^2$  es armónica. En este último caso, puesto que  $P_{\mu_e}$  es también armónica, es fácil ver que forzosamente debe ser  $P_{\mu_e} \equiv \text{constante}$ . Puesto que  $P_{\mu_e}(0) = 1/(2\pi)$ , se sigue que  $\mu_e$  es la medida de Lebesgue normalizada, es decir, ¡la medida de equilibrio de  $\partial\Delta$ ! y, por tanto,  $\text{cap}_\alpha(E) = \text{cap}_\alpha(\partial\Delta)$ .

En el caso general necesitaremos la caracterización de la  $\alpha$ -capacidad y de la  $\alpha$ -distribución de equilibrio para borelianos generales vista en la Sección 1.5.

Sea  $E$  un subconjunto de Borel de  $\partial\Delta$  tal que

$$(3.18) \quad \text{cap}_\alpha(f^{-1}(E)) = \text{cap}_\alpha(E) > 0.$$

Elijamos una sucesión creciente de conjuntos compactos  $K_n \subseteq E$  tales que

$$\text{cap}_\alpha(K_n) \nearrow \text{cap}_\alpha(E).$$

Sea  $\mu_n$  la  $\alpha$ -medida de equilibrio de  $K_n$  y sea  $\mu_e$  la medida de probabilidad soportada en  $\overline{E}$  dada por los Lemas 1.7 y 1.8. Recordemos que  $\mu_e$  minimiza la integral de energía y que,

$$I_\alpha(\mu_e) = \frac{1}{\text{cap}_\alpha(E)}, \quad \text{si } 0 < \alpha < 1,$$

y

$$I_0(\mu_e) = \log \frac{1}{\text{cap}_0(E)}, \quad \text{si } \alpha = 0.$$

Por otro lado, recordemos también que vimos en la demostración de los Lemas 1.7 y 1.8 que

$$\mu_n \xrightarrow{w^*} \mu_e \quad \text{y} \quad I_\alpha(\mu_n) \searrow I_\alpha(\mu_e),$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ . De hecho,

$$\|\mu_n - \mu_e\| \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Obsérvese que aquí  $\|\cdot\|$  denota, no la masa total de la medida, sino la norma asociada al producto escalar

$$\langle \sigma, \gamma \rangle = \iint \Phi_\alpha(|x - y|) d\sigma(x) d\gamma(y).$$

es decir,  $\|\sigma\|^2 = I_\alpha(\sigma)$ .

Sea  $\nu_n$  la medida de probabilidad, tal que  $P_{\nu_n} = P_{\mu_n} \circ f$ :  $\nu_n$  también verifica que  $\nu_n(f^{-1}(K_n)) = 1$  (ver Lema 3.3). Podemos suponer, tras extraer una subsucesión, que  $\nu_n \xrightarrow{w^*} \nu$ , donde  $\nu$  es una probabilidad soportada en  $\overline{f^{-1}(E)}$ . Como el núcleo de Poisson es continuo en  $\Delta$ , obtenemos, tras usar la convergencia  $w^*$ , que

$$P_{\mu_n} \rightarrow P_{\mu_e} \quad \text{y} \quad P_{\nu_n} \rightarrow P_\nu, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

puntualmente. Por tanto  $P_\nu = P_{\mu_e} \circ f$  (de donde  $\nu$  es una probabilidad en  $f^{-1}(\bar{E})$ ).

AFIRMACIÓN:  $I_\alpha(\nu_n) \rightarrow I_\alpha(\nu)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Como  $\nu_n$  es una medida de probabilidad en  $f^{-1}(E)$ , los Lemas 1.7 y 1.8 nos garantizan que

$$\frac{1}{\text{cap}_\alpha(f^{-1}(E))} \leq I_\alpha(\nu_n), \quad \text{para todo } n,$$

y, haciendo  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{1}{\text{cap}_\alpha(f^{-1}(E))} \leq I_\alpha(\nu).$$

Como  $P_\nu = P_{\mu_e} \circ f$ , el principio de subordinación, (3.15) y (3.16) nos dicen (como en (3.17)) que

$$\frac{1}{\text{cap}_\alpha(f^{-1}(E))} \leq I_\alpha(\nu) \leq I_\alpha(\mu_e) = \frac{1}{\text{cap}_\alpha(E)}.$$

De (3.18) deducimos que  $I_\alpha(\nu) = I_\alpha(\mu_e)$ . Finalmente, podemos razonar como en el caso en que  $E$  es cerrado y concluir que ó bien  $f$  es una rotación ó bien  $\mu_e$  es la medida de Lebesgue normalizada, es decir,  $\text{cap}_\alpha(E) = \text{cap}_\alpha(\partial\Delta)$ . ■

DEMOSTRACIÓN DE LA AFIRMACIÓN: Consideremos primero el caso  $0 < \alpha < 1$ . Puesto que  $P_{\nu_p - \nu_n} = P_{\mu_p - \mu_n} \circ f$ , por aplicación del principio de subordinación y (3.15) obtenemos que

$$\|\nu_p - \nu_n\|^2 = I_\alpha(\nu_p - \nu_n) \leq I_\alpha(\mu_p - \mu_n) = \|\mu_p - \mu_n\|^2 \xrightarrow{p, n \rightarrow \infty} 0.$$

Por tanto  $\{\nu_n\}$  es una sucesión de Cauchy en la norma y, por tanto, por el Lema 1.5, tenemos que

$$\|\nu_n - \nu\| \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad I_\alpha(\nu_n) \rightarrow I_\alpha(\nu).$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ .

En el caso  $\alpha = 0$ , sean  $\mu_n^*$  and  $\nu_n^*$  las medidas definidas a partir de  $\mu_n$  y  $\nu_n$  como en la demostración del Lema 1.8., es decir,

$$\mu_n(A) = \mu_n^*\left(\frac{1}{2}A\right),$$

para todo boreliano de  $\partial\Delta$  (y análogamente para  $\nu_n$ ). Es claro que

$$I_0(\mu_n^*) = I_0(\mu_n) + \log 2, \quad I_0(\nu_n^*) = I_0(\nu_n) + \log 2.$$

Usando de nuevo el principio de subordinación y (3.16) obtenemos que

$$\begin{aligned} \|\nu_p^* - \nu_n^*\|^2 &= I_0(\nu_p^* - \nu_n^*) \\ &= I_0(\nu_p - \nu_n) + \log 2 \\ &\leq I_0(\mu_p - \mu_n) + \log 2 \\ &= \|\mu_p^* - \mu_n^*\|^2 \xrightarrow{p, n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Por tanto,  $\{\nu_n^*\}$  es una sucesión de Cauchy en la norma y de nuevo por el Lema 1.5, obtenemos que

$$\|\nu_n^* - \nu^*\| \rightarrow 0 \quad \text{and} \quad I_0(\nu_n^*) \rightarrow I_0(\nu^*),$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por tanto,

$$I_0(\nu_n) \rightarrow I_0(\nu), \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \quad \blacksquare$$

Así pues, hemos reducido la demostración del Teorema 2 a probar las expresiones integrales de la energía (3.15) y (3.16). Esto es lo que hacemos en el siguiente

**Teorema 3.** Si  $\mu$  es una medida con signo soportada en  $\partial\Delta$ , entonces

i) Si  $0 < \alpha < 1$ ,

$$\begin{aligned} I_\alpha(\mu) &= C_\alpha \iint_{\Delta} |P_\mu(z)|^2 |z|^{\alpha-2} (1 - |z|)^{-\alpha} dx dy \\ &= C_\alpha \int_0^1 \left\{ \int_0^{2\pi} |P_\mu(re^{i\theta})|^2 d\theta \right\} r^{\alpha-1} (1 - r^2)^{-\alpha} dr, \end{aligned}$$

donde

$$C_\alpha = \frac{4\pi}{\Gamma(\frac{\alpha}{2}) \Gamma(1 - \frac{\alpha}{2})},$$

y  $\Gamma(\cdot)$  es la función gamma de Euler.

ii) Si  $\alpha = 0$ ,

$$\begin{aligned} I_0(\mu) &= 2\pi \iint_{\Delta} \left| P_\mu(z) - \frac{m}{2\pi} \right|^2 \frac{dx dy}{|z|^2} \\ &= 2\pi \int_0^1 \left\{ \int_0^{2\pi} \left| P_\mu(re^{i\theta}) - \frac{m}{2\pi} \right|^2 d\theta \right\} \frac{dr}{r}, \end{aligned}$$

donde  $m = \mu(\partial\Delta)$ .

DEMOSTRACIÓN. Denotemos por  $\varphi_\alpha(t)$  el núcleo

$$\varphi_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{1}{|1 - e^{it}|^\alpha}, & \text{si } 0 < \alpha < 1. \\ \log \frac{1}{|1 - e^{it}|}, & \text{si } \alpha = 0. \end{cases}$$

Si  $\gamma_{n,\alpha}$  y  $\hat{\mu}(n)$  denotan, respectivamente, los coeficientes de Fourier del núcleo  $\varphi_\alpha(t)$  y de la medida  $\mu$ , esto es,

$$\gamma_{n,\alpha} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_\alpha(t) e^{-int} dt, \quad \hat{\mu}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(t),$$



el teorema de Plancherel, aplicado dos veces, nos da para la  $\alpha$ -energía ( $0 \leq \alpha < 1$ ) que

$$\begin{aligned} I_\alpha(\mu) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_\alpha(t-s) d\mu(t) d\mu(s) \\ (3.19) \quad &= 4\pi^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{\mu}(n)|^2 \gamma_{n,\alpha}. \end{aligned}$$

Si llamamos  $\Lambda_\alpha(\mu)$  al lado derecho de i) y ii), puesto que

$$P_\mu(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{|e^{it} - re^{i\theta}|^2} d\mu(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \hat{\mu}(n) e^{-int},$$

tenemos que:

ii) Si  $\alpha = 0$ , aplicando el teorema de Plancherel

$$\begin{aligned} \Lambda_0(\mu) &= 4\pi^2 \int_0^1 \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} |\hat{\mu}(n)|^2 r^{2|n|} \frac{dr}{r} \\ (3.20) \quad &= 4\pi^2 \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{|\hat{\mu}(n)|^2}{2|n|}. \end{aligned}$$

Ahora bien, como

$$\log \frac{1}{|1 - e^{it}|} = \operatorname{Re} \left( \operatorname{Log} \frac{1}{1 - e^{it}} \right) = \operatorname{Re} \left( \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{int}}{n} \right) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{int}}{2|n|},$$

se sigue que los coeficientes de Fourier del núcleo logarítmico son:

$$(3.21) \quad \gamma_{n,0} = \begin{cases} \frac{1}{2|n|}, & \text{si } n \neq 0, \\ 0, & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

De (3.19), (3.20) y (3.21) deducimos que  $I_0(\mu) = \Lambda_0(\mu)$ .

i) Si  $0 < \alpha < 1$ , aplicando nuevamente dos veces el teorema de Plancherel al lado derecho de (3.15), obtenemos que

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha(\mu) &= 2\pi \int_0^1 \left\{ \sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{\mu}(n)|^2 r^{2|n|} \right\} K_\alpha(r) r dr \\ &= 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{\mu}(n)|^2 \int_0^1 r^{2|n|+1} K_\alpha(r) dr, \end{aligned}$$

que, comparando con (3.19) nos dice que la función  $K_\alpha(r)$  buscada debe verificar

$$(3.22) \quad 2\pi \gamma_{n,\alpha} = \int_0^1 r^{2n+1} K_\alpha(r) dr, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Obsérvese que, cambiando de variable, esto equivale a encontrar una función  $h_\alpha(t)$  tal que

$$\gamma_{n,\alpha} = \int_0^\infty h_\alpha(t) e^{-nt} dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

esto es, tal que la restricción de la transformada de Laplace de  $h_\alpha$  a los números enteros coincida con los coeficientes de Fourier  $\gamma_{n,\alpha}$  del núcleo  $\varphi_\alpha(t)$ .

La clave para encontrar la función  $K_\alpha(r)$  es poder calcular los coeficientes  $\gamma_{n,\alpha}$ . Ahora bien,

$$(3.23) \quad \begin{aligned} \gamma_{n,\alpha} = \gamma_{-n,\alpha} &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{|1 - e^{it}|^\alpha} dt \\ &= \frac{2^{-\alpha}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sin \frac{t}{2}\right)^{-\alpha} e^{int} dt \\ &= \frac{2^{-\alpha}}{\pi} \int_0^\pi (\sin t)^{-\alpha} e^{2int} dt. \end{aligned}$$

El siguiente lema nos da el valor de la última integral.

**Lema 3.5.** Si  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $b > a > -1$ , entonces

$$2^a i^{a+1} \int_0^\pi \sin^a t e^{ibt} dt = \frac{i^{2b} - i^{2a}}{2} B\left(a + 1, \frac{b-a}{2}\right),$$

donde  $B(\cdot, \cdot)$  es la función beta de Euler.

$$B(x, y) = \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1} dt.$$

**DEMOSTRACIÓN.** Consideremos la función

$$f(z) = \left(z - \frac{1}{z}\right)^a z^{b-1}$$

e integrémosla a lo largo del camino  $C$  de la figura 1. Puesto que  $f$  es holomorfa en el recinto interior a la curva,

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

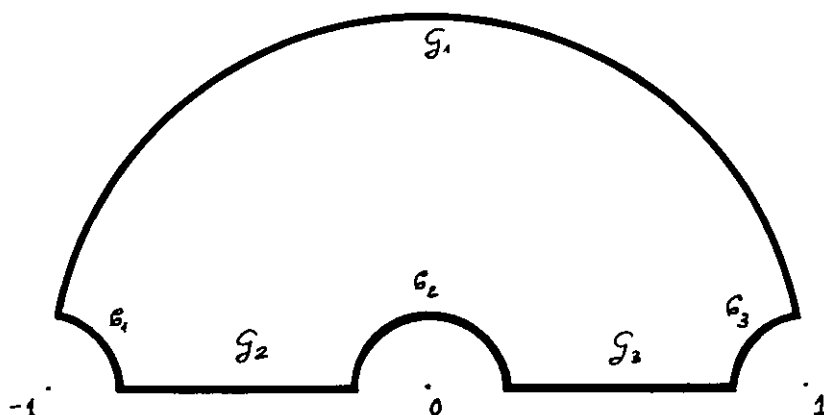


Figura 1.

La condición  $b > a > -1$ , nos asegura que la integral de  $f$  a lo largo de los pequeños arcos de círculo  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  de radio  $\varepsilon$ , con centro en  $-1, 0, 1$ , tiende a cero cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Por otro lado,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{G_1} f(z) dz &= (2i)^a \int_0^\pi \operatorname{sen}^a t \, e^{ibt} i \, dt \\ &= 2^a i^{a+1} \int_0^\pi \operatorname{sen}^a t \, e^{ibt} \, dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{G_2} f(z) dz &= i^{2b-2} \int_0^1 (1-t^2)^a t^{b-a-1} \, dt \\ &= -\frac{i^{2b}}{2} \int_0^1 (1-x)^a x^{-1+(b-a)/2} \, dt \\ &= -\frac{i^{2b}}{2} B(a+1, \frac{b-a}{2}), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{G_3} f(z) dz &= \int_0^1 \left( i^2 \left( \frac{1-t^2}{t} \right) \right)^a t^{b-1} \, dt \\ &= i^{2a} \int_0^1 (1-t^2)^a t^{b-a-1} \, dt \\ &= \frac{i^{2a}}{2} B(a+1, \frac{b-a}{2}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

En nuestro caso  $a = -\alpha$ ,  $b = 2n$ , con lo que

$$\begin{aligned} i^{\alpha-1} \frac{i^{2b} - i^{2a}}{2} &= \frac{i^{\alpha-1}}{2} (1 - i^{-2\alpha}) \\ &= \frac{1}{2i} (i^{\alpha} - i^{-\alpha}) \\ &= \frac{1}{2i} (e^{i\pi\alpha/2} - e^{-i\pi\alpha/2}) = \operatorname{sen} \frac{\pi\alpha}{2}, \end{aligned}$$

y en virtud de la conocida fórmula de los complementos de Euler,

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi}, \quad z \in \mathbb{C},$$

en la que  $\Gamma(\cdot)$  es la función Gamma de Euler

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt,$$

obtenemos, por (3.23), que

$$\begin{aligned} \gamma_{n,\alpha} &= \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi\alpha}{2} B(1-\alpha, n + \frac{\alpha}{2}) \\ (3.24) \quad &= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})} B(1-\alpha, n + \frac{\alpha}{2}). \end{aligned}$$

Ahora bien, como

$$\begin{aligned} B(1-\alpha, n + \frac{\alpha}{2}) &= \int_0^1 t^n t^{-1+\alpha/2} (1-t)^{-\alpha} dt \\ (r^2 = t) \quad &= 2 \int_0^1 r^{2n+1} r^{\alpha-2} (1-r^2)^{-\alpha} dr. \end{aligned}$$

vemos que (3.22), y por tanto (3.15), se verifica con

$$K_{\alpha}(r) = \frac{4\pi}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})} r^{\alpha-2} (1-r^2)^{-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad \blacksquare$$

### 3.2.2. El teorema de distorsión capacitaria para funciones internas en la bola unidad de $\mathbb{C}^n$ .

En esta sección extenderemos el Teorema 2 al caso de funciones internas

$$f : \mathbb{B}_n \longrightarrow \Delta,$$

donde  $\mathbb{B}_n = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| < 1\}$ . Como consecuencia, obtendremos la misma desigualdad entre las dimensiones de Hausdorff de  $E$  y  $f^{-1}(E)$  que en el Teorema 1. Concretamente,

**Teorema 4 ([FPR]).** *Si  $f : \mathbb{B}_n \longrightarrow \Delta$  es interna,  $f(0) = 0$ , y  $E$  es un boreliano de  $\partial\Delta$ , entonces, si  $0 < \alpha < 1$ ,*

$$(3.25) \quad \text{cap}_{2n-2+\alpha}(f^{-1}(E)) \geq K(n, \alpha) \text{cap}_\alpha(E),$$

donde

$$K(n, \alpha) = \frac{\Gamma(n-1 + \frac{\alpha}{2})}{(n-1)! \Gamma(\frac{\alpha}{2})},$$

y

$$(3.26) \quad \frac{1}{\text{cap}_{2n-2}(f^{-1}(E))} \leq 1 + (2n-2) \log \frac{1}{\text{cap}_0(E)}, \quad (n > 1).$$

En particular, para cualquier función interna,

$$\text{Dim}(f^{-1}(E)) \geq 2n-2 + \text{Dim}(E).$$

**OBSERVACIÓN.** Si  $n = 1$ ,  $K(1, \alpha) \equiv 1$ , por lo que (3.25) extiende a dimensión superior la desigualdad (3.12) del Teorema 2.

En cuanto al comportamiento de la constante  $K(n, \alpha)$ , se tiene que, para  $\alpha$  fijo,

$$K(n, \alpha) \sim \frac{n^{-1+\alpha/2}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

y para  $n$  fijo,

$$K(n, \alpha) \sim C_n \alpha, \quad \text{cuando } \alpha \rightarrow 0.$$

Como en el caso  $n = 1$ , la prueba del Teorema 4 consiste en reducirla a encontrar una expresión integral para la  $\alpha$ -energía de una medida soportada en la esfera unidad de  $\mathbb{R}^N$ ,  $\Sigma_{N-1}$ , en términos de su extensión de Poisson (ver Teorema 5, más adelante). Para ello necesitaremos sustituir los polinomios trigonométricos  $\{e^{ikt}\}_{k=-\infty}^{\infty}$  por ciertos armónicos esféricos (los armónicos zonales) con vistas a

desarrollar el núcleo de Poisson y el núcleo integral  $\Phi_\alpha$  en términos de dichos armónicos. Seguiremos a E. M. Stein y G. Weiss [SW, Capítulo 4] en lo que concierne a notaciones y resultados acerca de los armónicos esféricos.

Sea  $\mathcal{H}_k$  el espacio vectorial (real) de los armónicos esféricos de grado  $k$  en  $\mathbb{R}^N$  ( $N > 1$ ). Si  $a_k$  denota la dimensión de  $\mathcal{H}_k$ , tenemos que ([SW, p. 145])

$$a_0 = 1, \quad a_1 = N, \quad \dots, \quad a_k = \frac{N + 2k - 2}{k} \binom{N + k - 3}{k - 1}.$$

Es sabido que el espacio  $L^2(\Sigma_{N-1}, d\xi)$  puede descomponerse como

$$L^2(\Sigma_{N-1}, d\xi) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k,$$

donde  $d\xi$  denota la medida de Lebesgue usual (no normalizada).

Si  $\xi, \eta \in \Sigma_{N-1}$ , el armónico zonal de grado  $k$  con polo  $\eta$ ,  $Z_\eta^{(k)}(\xi)$ , se define por dualidad a través del funcional

$$L(Y^{(k)}) = Y^{(k)}(\eta) = \int_{\Sigma_{N-1}} Y^{(k)}(\xi) Z_\eta^{(k)}(\xi) d\xi, \quad Y^{(k)} \in \mathcal{H}_k.$$

Si  $\{Y_1^{(k)}, \dots, Y_{a_k}^{(k)}\}$  es una base ortonormal de  $\mathcal{H}_k$ , se tiene que ([SW, p. 143])

$$Z_\eta^{(k)}(\xi) = \sum_{m=1}^{a_k} Y_m^{(k)}(\xi) Y_m^{(k)}(\eta) = Z_\xi^{(k)}(\eta).$$

La clave de la prueba es el hecho de que el núcleo de la capacidad es en realidad, como en el caso  $n = 1$ , una función de una variable, aunque ahora en el intervalo  $[-1, 1]$ .

$$\Phi_\alpha(|\xi - \eta|) = \frac{1}{|\xi - \eta|^\alpha} = g_\alpha(\xi \cdot \eta).$$

donde

$$g_\alpha(t) = \left( \frac{1}{2 - 2t} \right)^{\alpha/2}, \quad 0 < \alpha < N - 1.$$

Si  $N > 2$  los armónicos zonales pueden expresarse en términos de los polinomios ultrasféricos (ó de Gegenbauer) de parámetro  $\lambda = (N - 2)/2$ , que se definen mediante

$$(1 - 2rt + r^2)^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^\lambda(t) r^k, \quad |r| < 1, \quad |t| \leq 1, \quad \lambda > 0.$$

Concretamente, [SW, p. 149], si  $N > 2$ ,

$$Z_\eta^{(k)}(\xi) = c_{k,N} P_k^{(N-2)/2}(\xi \cdot \eta).$$

Como los polinomios de Gegenbauer constituyen una base ortogonal de

$$L^2([-1, 1], (1 - t^2)^{(N-3)/2} dt), \quad \text{si } N > 2,$$

tenemos que

$$g_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k P_k^{(N-2)/2}(t),$$

con

$$g_k \|P_k^{(N-2)/2}\|_2^2 = \langle g_\alpha, P_k^{(N-2)/2} \rangle.$$

Por tanto,

$$(3.27) \quad \Phi_\alpha(|\xi - \eta|) = \sum_{k=0}^{\infty} g^{(k)} Z_\eta^{(k)}(\xi), \quad \text{con } g^{(k)} = \frac{g_k}{c_{k,N}}.$$

El caso  $N = 2$ , es decir  $n = 1$ , es ligeramente diferente. En este caso, podemos tomar como base de  $\mathcal{H}_k$ , en lugar de  $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ikt}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikt}\}$  que conducen al análisis de Fourier clásico, los polinomios

$$Y_1^{(k)}(e^{i\theta}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin k\theta, \quad Y_2^{(k)}(e^{i\theta}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos k\theta,$$

si  $k \neq 0$ , e

$$Y^{(0)} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Entonces, si  $\xi = e^{i\theta}$ ,  $\eta = e^{i\psi}$ ,  $\xi \cdot \eta = \cos(\theta - \psi)$ , con lo que

$$\begin{aligned} Z_\eta^{(k)}(\xi) &= Z_{e^{i\psi}}^{(k)}(e^{i\theta}) = \sum_{j=1}^2 Y_j^{(k)}(e^{i\psi}) Y_j^{(k)}(e^{i\theta}) \\ &= \frac{1}{\pi} \cos k(\theta - \psi) \\ &= \frac{1}{\pi} T_k(\cos(\theta - \psi)) \\ &= \frac{1}{\pi} T_k(\xi \cdot \eta), \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

$$Z_\eta^{(0)}(\xi) = Z_{e^{i\psi}}^{(0)}(e^{i\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} T_0(\xi \cdot \eta),$$

donde los  $T_k$  denotan los polinomios de Chebyshev, definidos en  $[-1, 1]$  por medio de la relación

$$T_k(\cos \theta) = \cos k\theta,$$

y que también constituyen una base ortogonal de

$$L^2([-1, 1], (1 - t^2)^{-1/2} dt).$$

Por tanto, en el caso  $N = 2$ , podemos poner  $P_k^0 = T_k$ , es decir sustituir los polinomios de Gegenbauer por los de Chebysev sin perder el hecho fundamental de que  $P_k^{(N-2)/2}(\xi \cdot \eta) = c_{k,N} Z_\eta^{(k)}(\xi)$ . Además lo anterior prueba que, en este caso,

$$(3.28) \quad c_{k,2} = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{si } k > 0, \\ \frac{1}{2\pi}, & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

El cálculo de los coeficientes  $c_{k,N}$ , si  $N > 2$ , es como sigue. En primer lugar, si  $\omega_{N-1}$  denota la medida de superficie de  $\Sigma_{N-1}$ , se tiene [SW, p. 144]

$$\|Z_\eta^{(k)}\|_2^2 = \frac{a_k}{\omega_{N-1}},$$

mientras que, por otro lado,

$$\begin{aligned} \|Z_\eta^{(k)}\|_2^2 &= c_{k,N}^2 \int_{\Sigma_{N-1}} |P_k^{(N-2)/2}(\xi \cdot \eta)|^2 d\xi \\ &= c_{k,N}^2 \omega_{N-2} \int_{-1}^1 |P_k^{(N-2)/2}(t)|^2 (1 - t^2)^{(N-3)/2} dt. \end{aligned}$$

Como, [AS, p. 774],

$$(3.29) \quad \|P_k^{(N-2)/2}\|_{L^2([-1,1],(1-t^2)^{(N-3)/2} dt)}^2 = \frac{\pi 2^{4-N} \Gamma(k + N - 2)}{k! (2k + N - 2) \Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right)^2},$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} c_{k,N}^2 &= \frac{a_k}{\omega_{N-1} \omega_{N-2}} \|P_k^{(N-2)/2}\|_{L^2([-1,1],(1-t^2)^{(N-3)/2} dt)}^2 \\ &= \frac{(N + 2k - 2)^2}{16 \pi^N} \Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$(3.30) \quad c_{k,N} = \frac{N + 2k - 2}{4 \pi^{N/2}} \Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right), \quad \text{si } N > 2.$$



Ahora, para obtener los coeficientes de Fourier  $\langle g_\alpha, P_k^{(N-2)/2} \rangle$ , usaremos la función hipergeométrica de Gauss,

$$F\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| t\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_m} \frac{t^m}{m!},$$

donde

$$(u)_m = u(u+1)\dots(u+m-1) = \frac{\Gamma(u+m)}{\Gamma(u)}.$$

Tanto los polinomios de Gegenbauer como los de Chebysev pueden expresarse en términos de  $F$  ([AS, p. 779])

Si  $N > 2$ , para los polinomios de Gegenbauer se tiene que

$$(3.31) \quad P_k^{(N-2)/2}(t) = \binom{k+N-3}{k} F\left(\begin{matrix} -k, k+N-2 \\ (N-1)/2 \end{matrix} \middle| \frac{1-t}{2}\right).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \langle g_\alpha, P_k^{(N-2)/2} \rangle &= \binom{k+N-3}{k} \int_{-1}^1 F\left(\begin{matrix} -k, k+N-2 \\ (N-1)/2 \end{matrix} \middle| \frac{1-t}{2}\right) \\ &\quad \cdot (2-2t)^{-\alpha/2} (1-t^2)^{(N-3)/2} dt. \end{aligned}$$

Haciendo  $(1-t)/2 = s$  en la expresión anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned} \langle g_\alpha, P_k^{(N-2)/2} \rangle &= 2^{N-2-\alpha} \binom{k+N-3}{k} \int_0^1 s^{-1+(N-1-\alpha)/2} (1-s)^{-1+(N-1)/2} \\ &\quad \cdot F\left(\begin{matrix} -k, k+N-2 \\ (N-1)/2 \end{matrix} \middle| s\right) ds. \end{aligned}$$

Por otro lado, usando el hecho de que los polinomios de Gegenbauer verifican ([SW, p. 149], [AS, p. 775]),

$$P_k^{(N-2)/2}(-t) = (-1)^k P_k^{(N-2)/2}(t).$$

poniendo  $(1-t)/2 = s$  en (3.31), deducimos que

$$F\left(\begin{matrix} -k, k+N-2 \\ (N-1)/2 \end{matrix} \middle| s\right) = (-1)^k F\left(\begin{matrix} -k, k+N-2 \\ (N-1)/2 \end{matrix} \middle| 1-s\right),$$

por lo que

$$\begin{aligned} \langle g_\alpha, P_k^{(N-2)/2} \rangle &= 2^{N-2-\alpha} \binom{k+N-3}{k} (-1)^k \\ (3.32) \quad &\cdot \int_0^1 s^{-1+(N-1-\alpha)/2} (1-s)^{-1+(N-1)/2} \\ &\quad \cdot F\left(\begin{matrix} -k, k+N-2 \\ (N-1)/2 \end{matrix} \middle| 1-s\right) ds. \end{aligned}$$

Por otro lado, integrando término a término la serie que define a  $F$ , obtenemos que

$$(3.33) \quad \int_0^1 s^{a-1}(1-s)^{b-1} F\left(\begin{matrix} -k, c \\ b \end{matrix} \middle| 1-s\right) ds = B(a, b) F\left(\begin{matrix} -k, c \\ a+b \end{matrix} \middle| 1\right),$$

donde  $B(\cdot, \cdot)$  es la función beta de Euler. Ahora bien,

**Lema 3.6** (Fórmula de Gauss [Ba, p. 2], [AS, p.556]). *Si  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $c > a + b$ , entonces*

$$F\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| 1\right) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)}.$$

Por tanto,

$$F\left(\begin{matrix} -k, c \\ a+b \end{matrix} \middle| 1\right) = \frac{\Gamma(a+b) \Gamma(a+b-c+k)}{\Gamma(a+b+k) \Gamma(a+b-c)},$$

y usando la conocida relación siguiente, satisfecha por la función gamma de Euler,

$$\frac{\Gamma(-z)}{\Gamma(-z-k)} = (-1)^k \frac{\Gamma(z+k+1)}{\Gamma(z+1)},$$

obtenemos que

$$F\left(\begin{matrix} -k, c \\ a+b \end{matrix} \middle| 1\right) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+b+k)} (-1)^k \frac{\Gamma(1+c-a-b)}{\Gamma(1+c-a-b-k)}.$$

Así, (3.33) se convierte en

$$(-1)^k \int_0^1 s^{a-1}(1-s)^{b-1} F\left(\begin{matrix} -k, c \\ b \end{matrix} \middle| 1-s\right) ds = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(1+c-a-b)}{\Gamma(a+b+k)\Gamma(1+c-a-b-k)},$$

que, en nuestro caso, nos dice que (3.32) se reduce a

$$(3.34) \quad \begin{aligned} & \langle g_\alpha, P_k^{(N-2)/2} \rangle = \\ & = 2^{N-2-\alpha} \binom{k+N-3}{k} \frac{\Gamma\left(\frac{N-1-\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right) \Gamma\left(k+\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(N-1-\frac{\alpha}{2}+k\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Por tanto, de (3.27), (3.29), (3.30) y (3.34), deducimos que, si  $N > 2$ ,

$$(3.35) \quad \begin{aligned} g^{(k)} &= \frac{\langle g, P_k^{(N-2)/2} \rangle}{c_{k,N} \|P_k^{(N-2)/2}\|_2^2} \\ &= 2^{N-1-\alpha} \pi^{(N-1)/2} \frac{\Gamma\left(\frac{N-1-\alpha}{2}\right) \Gamma\left(k+\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(N-1-\frac{\alpha}{2}+k\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Si  $N = 2$ , el  $k$ -ésimo polinomio de Chebyshev es [AS, p. 779]

$$T_k(t) = F\left(\begin{matrix} -k, k \\ 1/2 \end{matrix} \middle| \frac{1-t}{2}\right),$$

y, por tanto,

$$\langle g_\alpha, P_k^0 \rangle = \int_{-1}^1 (2-2t)^{-\alpha/2} F\left(\begin{matrix} -k, k \\ 1/2 \end{matrix} \middle| \frac{1-t}{2}\right) (1-t^2)^{-1/2} dt.$$

Con los mismos cálculos que en el caso  $N = 2$ , obtenemos que

$$\langle g_\alpha, P_k^0 \rangle = 2^{-\alpha} \pi^{1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \Gamma\left(k + \frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2} + k\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Además es fácil ver [AS, p.774], que

$$\|P_k^0\|_2^2 = \|T_k\|_2^2 = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{si } k > 0, \\ \pi, & \text{si } k = 0, \end{cases}$$

por lo que, usando (3.28) en lugar de (3.30), vemos que (3.35) también es válida en el caso  $N = 2$ .

Por tanto, hemos probado el siguiente:

**Lema 3.7.** *Para todo  $N \in \mathbb{N}$ ,  $N > 1$  and  $0 < \alpha < N - 1$ ,*

$$\Phi_\alpha(|\xi - \eta|) = \sum_{k=0}^{\infty} g^{(k)} Z_\eta^{(k)}(\xi),$$

donde

$$g^{(k)} = 2^{N-1-\alpha} \pi^{(N-1)/2} \frac{\Gamma\left(\frac{N-1-\alpha}{2}\right) \Gamma\left(k + \frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(N-1 - \frac{\alpha}{2} + k\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Ahora, una vez calculados los coeficientes de Fourier del núcleo  $\Phi_\alpha$ , podemos expresar la  $\alpha$ -energía de una medida  $\mu$  en términos de su extensión de Poisson  $P_\mu$ .

**Teorema 5** ([FPR]) *Si  $\mu$  es una medida con signo soportada en  $\Sigma_{N-1}$ , tenemos que*

i) *Si  $0 < \alpha < N - 1$ , entonces*

$$I_\alpha(\mu) = C(N, \alpha) \int_0^1 \left\{ \int_{\Sigma_{N-1}} |P_\mu(r\xi)|^2 d\xi \right\} r^{\alpha-1} (1-r^2)^{N-2-\alpha} dr,$$

con

$$C(N, \alpha) = \frac{4\pi^{N/2}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N-\alpha}{2}\right)}.$$

ii) Si  $m = \mu(\Sigma_{N-1})$ , entonces

$$\begin{aligned} I_0(\mu) &= \omega_{N-1} \int_0^1 \left\{ \int_{\Sigma_{N-1}} \left| P_\mu(r\xi) - \frac{m}{\omega_{N-1}} \right|^2 d\xi \right\} (1-r^2)^{N-2} \frac{dr}{r} \\ &\quad + \frac{m^2}{2} \left[ \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{N}{2}\right) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(N-1) \right]. \end{aligned}$$

En particular, si  $N = 2$ ,

$$I_0(\mu) = 2\pi \int_0^1 \left\{ \int_0^{2\pi} \left| P_\mu(re^{i\theta}) - \frac{m}{2\pi} \right|^2 d\theta \right\} \frac{dr}{r}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean  $\{\mu_j^{(k)}\}$  ( $k \geq 0$ ,  $1 \leq j \leq a_k$ ) los coeficientes de Fourier de la medida  $\mu$ , esto es,

$$\begin{aligned} \mu &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \mu_j^{(k)} Y_j^{(k)}, \\ \mu_j^{(k)} &= \int_{\Sigma_{N-1}} Y_j^{(k)}(\xi) d\mu(\xi). \end{aligned}$$

Recordemos que  $P_\mu$  se define como

$$P_\mu(r\xi) = \int_{\Sigma_{N-1}} p(\eta, r\xi) d\mu(\eta),$$

donde  $p(\eta, r\xi)$  es núcleo de Poisson clásico (normalizado),

$$p(\eta, r\xi) = \frac{1}{\omega_{N-1}} \frac{1-r^2}{|\eta - r\xi|^N}.$$

Es conocido que (ver, por ejemplo, [SW, p. 145])

$$p(\eta, r\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k Z_\eta^{(k)}(\xi) = \sum_{k,j} r^k Y_j^{(k)}(\eta) Y_j^{(k)}(\xi).$$

Ahora, el teorema de Plancherel nos da que

$$P_\mu(r\xi) = \sum_{k,j} r^k \mu_j^{(k)} Y_j^{(k)}(\xi),$$

y usando de nuevo el teorema de Plancherel, obtenemos que

$$\int_{\Sigma_{N-1}} |P_\mu(r\xi)|^2 d\xi = \sum_{k,j} r^{2k} |\mu_j^{(k)}|^2.$$

Así, si llamamos  $\Lambda_\alpha(\mu)$  al lado derecho de i), tenemos

$$\Lambda_\alpha(\mu) = C(N, \alpha) \sum_{k,j} |\mu_j^{(k)}|^2 \int_0^1 r^{2k+\alpha-1} (1-r^2)^{N-2-\alpha} dr,$$

y, sustituyendo  $r^2 = t$ , llegamos a que

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha(\mu) &= \frac{C(N, \alpha)}{2} \sum_{k,j} |\mu_j^{(k)}|^2 \int_0^1 t^{k+(\alpha-1)/2} (1-t)^{N-2-\alpha} t^{-1/2} dt \\ (3.36) \quad &= \frac{C(N, \alpha)}{2} \sum_{k,j} |\mu_j^{(k)}|^2 B(N-1-\alpha, k+\frac{\alpha}{2}) \\ &= \frac{C(N, \alpha)}{2} \sum_{k,j} |\mu_j^{(k)}|^2 \frac{\Gamma(k+\frac{\alpha}{2}) \Gamma(N-1-\alpha)}{\Gamma(k+N-1-\frac{\alpha}{2})}. \end{aligned}$$

Ahora bien, usando la conocida fórmula de duplicación de la función gamma,

$$\sqrt{\pi} \Gamma(2z) = 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma(z + \frac{1}{2}),$$

con  $z = (N-1-\alpha)/2$ , tenemos que

$$\sqrt{\pi} \Gamma(N-1-\alpha) = 2^{N-2-\alpha} \Gamma\left(\frac{N-1-\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{N-\alpha}{2}\right).$$

Volviendo a (3.36), esto nos dice que

$$\Lambda_\alpha(\mu) = 2^{N-1-\alpha} \pi^{-1/2} C(N, \alpha) \sum_{k,j} \frac{\Gamma\left(\frac{N-1-\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{N-\alpha}{2}\right) \Gamma\left(k+\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma(k+N-1-\frac{\alpha}{2})} |\mu_j^{(k)}|^2,$$

es decir,

$$(3.37) \quad \Lambda_\alpha(\mu) = \sum_{k,j} g^{(k)} |\mu_j^{(k)}|^2,$$

de acuerdo con el Lema 3.7, si  $C(N, \alpha)$  es la constante que aparece en i).

Por otro lado, como

$$\Phi_\alpha(|\xi - \eta|) = \sum_{k=0}^{\infty} g^{(k)} Z_\eta^{(k)}(\xi) = \sum_{k,j} g^{(k)} Y_j^{(k)}(\eta) Y_j^{(k)}(\xi),$$

usando (dos veces) el teorema de Plancherel, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_{N-1}} \Phi_\alpha(|\xi - \eta|) d\mu(\eta) &= \sum_{k,j} g^{(k)} \mu_j^{(k)} Y_j^{(k)}(\xi), \\ I_\alpha(\mu) &= \sum_{k,j} g^{(k)} |\mu_j^{(k)}|^2, \end{aligned}$$

que, en vista de (3.37), termina de probar la parte i) del teorema.

Para probar ii), observemos en primer lugar que

$$(3.38) \quad \int_{\Sigma_{N-1}} \left| P_\mu(r\xi) - \frac{m}{\omega_{N-1}} \right|^2 d\xi + \frac{m^2}{\omega_{N-1}} = \int_{\Sigma_{N-1}} |P_\mu(r\xi)|^2 d\xi.$$

Integrando (3.38), obtenemos que

$$\begin{aligned} (3.39) \quad I_\alpha(\mu) &= C(N, \alpha) \cdot \\ &\cdot \int_0^1 \left\{ \int_{\Sigma_{N-1}} \left| P_\mu(r\xi) - \frac{m}{\omega_{N-1}} \right|^2 d\xi \right\} r^{\alpha-1} (1-r^2)^{N-2-\alpha} dr \\ &+ \frac{m^2}{\omega_{N-1}} C(N, \alpha) \int_0^1 r^{\alpha-1} (1-r^2)^{N-2-\alpha} dr, \end{aligned}$$

y como (haciendo  $r^2 = t$ )

$$\begin{aligned} \int_0^1 r^{\alpha-1} (1-r^2)^{N-2-\alpha} dr &= \frac{1}{2} B\left(\frac{\alpha}{2}, N-\alpha-1\right), \\ \omega_{N-1} &= \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}, \end{aligned}$$

sustituyendo en (3.39) deducimos que

$$\begin{aligned} (3.40) \quad I_\alpha(\mu) &= C(N, \alpha) \cdot \\ &\cdot \int_0^1 \left\{ \int_{\Sigma_{N-1}} \left| P_\mu(r\xi) - \frac{m}{\omega_{N-1}} \right|^2 d\xi \right\} r^{\alpha-1} (1-r^2)^{N-2-\alpha} dr \\ &+ m^2 U(\alpha), \end{aligned}$$

donde

$$U(\alpha) = \frac{\Gamma(N/2) \Gamma(N-1-\alpha)}{\Gamma((N-\alpha)/2) \Gamma(N-1-\alpha/2)}.$$

Obsérvese que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{C(N, \alpha)}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{4\pi^{N/2}}{\alpha \Gamma(\alpha/2) \Gamma((N-\alpha)/2)} = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)} = \omega_{N-1}.$$

Por tanto, de (3.40), se deduce que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{I_\alpha(\mu) - m^2 U(\alpha)}{\alpha} = \omega_{N-1} \int_0^1 \left\{ \int_{\Sigma_{N-1}} \left| P_\mu(r\xi) - \frac{m}{\omega_{N-1}} \right|^2 d\xi \right\} (1-r^2)^{N-2} \frac{dr}{r}.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{I_\alpha(\mu) - m^2 U(\alpha)}{\alpha} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{I_\alpha(\mu) - m^2}{\alpha} - m^2 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{U(\alpha) - 1}{\alpha} \\ &= \frac{d}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} I_\alpha(\mu) - m^2 U'(0) \\ &= I_0(\mu) - m^2 U'(0), \end{aligned}$$

y, por otro lado, es fácil ver que

$$\begin{aligned} U'(\alpha) &= - \frac{\Gamma(N/2) \Gamma'(N-\alpha-1)}{\Gamma((N-\alpha)/2) \Gamma(N-1-\alpha/2)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \Gamma(N-\alpha-1) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\Gamma'((N-\alpha)/2) \Gamma(N-1-\alpha/2) + \Gamma((N-\alpha)/2) \Gamma'(N-1-\alpha/2)}{\Gamma((N-\alpha)/2)^2 \Gamma(N-1-\alpha/2)^2}, \end{aligned}$$

con lo que

$$U'(0) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{N}{2} \right) - \frac{\Gamma'}{\Gamma} (N-1) \right].$$

Así, finalmente, (3.40) se convierte en (ii). ■

Ahora estamos en condiciones de probar el Teorema 4 como una consecuencia del Teorema 5. Para ello, como en el caso  $n = 1$ , necesitamos unos lemas previos que son generalizaciones de los Lemas 3.3 y 3.4.

**Lema 3.8.** *Sea  $\mu$  una medida finita y positiva en  $\partial\Delta$ , y sea  $f : \mathbb{B}_n \rightarrow \Delta$  una función interna. Entonces, existe una única medida positiva  $\tilde{\nu}$  en  $\mathbb{S}_n$  tal que  $P_\mu \circ f = P_{\tilde{\nu}}$  y*

$$\tilde{\nu}(f^{-1}(\text{support } \mu)) = \tilde{\nu}(\mathbb{S}_n).$$

Además, si  $f(0) = 0$ , entonces

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}} \tilde{\nu}(\mathbb{S}_n) = \frac{1}{2\pi} \mu(\partial\Delta).$$

DEMOSTRACIÓN. La primera parte del lema, ya la vimos al probar el Lema 2.1. Si, además,  $f(0) = 0$ , entonces, llamando  $E$  al soporte de  $\mu$ ,

$$\frac{\tilde{\nu}(f^{-1}(E))}{\omega_{2n-1}} = P_{\tilde{\nu}}(0) = P_{\mu}(f(0)) = P_{\mu}(0) = \frac{\mu(E)}{2\pi}. \quad \blacksquare$$

En lo que sigue, usaremos una normalización diferente: eligiendo

$$\nu = (2\pi/\omega_{2n-1}) \tilde{\nu},$$

obtenemos

$$P_{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_{2n-1}} P_{\mu} \circ f \quad \text{y} \quad \nu(\mathbb{S}_n) = \mu(\partial\Delta).$$

**Lema 3.9** (Principio de subordinación). *Sea  $f : \mathbb{B}_n \rightarrow \Delta$  una función holomorfa tal que  $f(0) = 0$ , y sea  $v : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  función subarmónica. Entonces*

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\mathbb{S}_n} v(f(r\xi)) d\xi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(re^{i\theta}) d\theta.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $r \in (0, 1)$ , y sea  $u$  la función armónica en  $\Delta_r = \{z \in \Delta : |z| < r\}$  tal que  $u = v$  en  $\partial\Delta_r$ . Por el lema de Schwarz (ver, por ejemplo, [R2, Teorema 8.1.2])  $|f(z)| \leq |z|$ , con lo que  $f$  lleva una bola  $B(0, r) = \{z \in \mathbb{B}_n : |z| < r\}$  en  $\Delta_r$ . Puesto que  $v$  es subarmónica,  $v \leq u$  en  $\Delta_r$ , luego  $v \circ f \leq u \circ f$  en  $B(0, r)$ . Finalmente, puesto que las funciones armónicas verifican el teorema del valor medio,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\Sigma_{N-1}} v(f(r\xi)) d\xi &\leq \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\Sigma_{N-1}} u(f(r\xi)) d\xi \\ &= u(f(0)) = u(0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(re^{i\theta}) d\theta. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN. Al contrario que en el Lema 3.4, no tenemos enunciado de igualdad en el Lema 3.9. Esto se debe a que en dimensión superior las funciones extremales



en el lema de Schwarz no están tan bien determinadas como en el caso  $n = 1$  (ver, por ejemplo, [R2, p. 164]).

El siguiente lema nos dice cuál es la relación entre las  $\alpha$ -energías de las medidas  $\mu$  y  $\nu$  del Lema 3.8.

**Lema 3.10.** *Sea  $\mu$  una medida con signo en  $\partial\Delta$ ,  $f: \mathbb{B}_n \rightarrow \Delta$  una función interna con  $f(0) = 0$ , y  $\nu$  una medida con signo en  $\mathbb{S}_n$  tal que*

$$P_\nu = \frac{2\pi}{\omega_{2n-1}} P_\mu \circ f.$$

Entonces,

i) Si  $n = 1$ ,  $0 \leq \alpha < 1$ .

$$I_\alpha(\nu) \leq I_\alpha(\mu).$$

ii) Si  $n > 1$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

$$K(n, \alpha) I_{2n-2+\alpha}(\nu) \leq I_\alpha(\mu),$$

donde

$$K(n, \alpha) = \frac{\Gamma\left(n - 1 + \frac{\alpha}{2}\right)}{(n-1)! \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

En este caso, si  $\alpha = 0$  y  $m = \mu(\partial\Delta) = \nu(\mathbb{S}_n)$ , entonces

$$I_{2n-2}(\nu) \leq (2n-2)I_0(\mu) + m^2.$$

**OBSERVACIÓN.** Dada  $\mu$ , la medida  $\nu$  se obtiene separando  $\mu$  en sus partes positiva y negativa (descomposición de Jordan de  $\mu$ ).

**DEMOSTRACIÓN.** Puesto que  $|P_\mu - \frac{m}{2\pi}|^2$  y  $|P_\mu|^2$  son subarmónicas, obtenemos por subordinación (Lema 3.9) que si  $n = 1$  y  $\alpha = 0$ ,

$$\int_0^{2\pi} \left| P_\nu - \frac{m}{2\pi} \right|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \left| P_\mu(f) - \frac{m}{2\pi} \right|^2 d\theta \leq \int_0^{2\pi} \left| P_\mu - \frac{m}{2\pi} \right|^2 d\theta,$$

y si  $n \geq 1$ ,  $0 < \alpha < 1$ , que

$$\int_{\mathbb{S}_n} |P_\nu|^2 d\xi = \left( \frac{2\pi}{\omega_{2n-1}} \right)^2 \int_{\mathbb{S}_n} |P_\mu(f)|^2 d\xi \leq \frac{2\pi}{\omega_{2n-1}} \int_0^{2\pi} |P_\mu|^2 d\theta.$$

En el primer caso obtenemos, como ya vimos en la demostración del Teorema 2, que

$$I_0(\nu) \leq I_0(\mu)$$

integrando con respecto a  $2\pi dr/r$  y aplicando la parte ii) del Teorema 5.

En el segundo caso, usando la parte i) del Teorema 5,

$$\begin{aligned} I_{2n-2+\alpha}(\nu) &= C(2n, 2n-2+\alpha) \int_0^1 \left\{ \int_{\mathbb{S}_n} |P_\nu(r\xi)|^2 d\xi \right\} r^{2n-2+\alpha-1} \frac{dr}{(1-r^2)^\alpha} \\ &\leq \frac{C(2n, 2n-2+\alpha)}{C(2, \alpha)} \frac{2\pi}{\omega_{2n-1}} \cdot C(2, \alpha) \int_0^1 \left\{ \int_0^{2\pi} |P_\mu(re^{i\theta})|^2 d\theta \right\} r^{\alpha-1} \frac{dr}{(1-r^2)^\alpha} \\ &= K(n, \alpha)^{-1} I_\alpha(\mu), \end{aligned}$$

donde

$$K(n, \alpha) = \frac{\Gamma(n-1+\frac{\alpha}{2})}{(n-1)! \Gamma(\frac{\alpha}{2})}.$$

Finalmente, puesto que  $\nu(\mathbb{S}_n) = m$ ,

$$\int_{\mathbb{S}_n} \left| P_\nu(r\xi) - \frac{m}{\omega_{2n-1}} \right|^2 d\xi = \int_{\mathbb{S}_n} |P_\nu(r\xi)|^2 d\xi - \frac{m^2}{\omega_{2n-1}},$$

y por tanto, si  $n > 1$ , el Teorema 5, nos da

$$\begin{aligned} (3.41) \quad I_{2n-2}(\nu) &= \frac{C(2n, 2n-2)m^2}{\omega_{2n-1}} \int_0^1 r^{2n-3} dr \\ &\quad + C(2n, 2n-2) \int_0^1 \left\{ \int_{\mathbb{S}_n} \left| P_\nu(r\xi) - \frac{m}{\omega_{2n-1}} \right|^2 d\xi \right\} r^{2n-3} dr \\ &= m^2 + \frac{4\pi^n}{(n-2)!} \int_0^1 \left\{ \int_{\mathbb{S}_n} \left| P_\nu(r\xi) - \frac{m}{\omega_{2n-1}} \right|^2 d\xi \right\} r^{2n-3} dr. \end{aligned}$$

Ahora bien, el principio de subordinación (Lema 3.9) nos dice que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}_n} \left| P_\nu(r\xi) - \frac{m}{\omega_{2n-1}} \right|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{S}_n} \left| \frac{2\pi}{\omega_{2n-1}} P_\mu(f(r\xi)) - \frac{m}{\omega_{2n-1}} \right|^2 d\xi \\ &= \left( \frac{2\pi}{\omega_{2n-1}} \right)^2 \int_{\mathbb{S}_n} \left| P_\mu(f(r\xi)) - \frac{m}{2\pi} \right|^2 d\xi \\ &\leq \frac{2\pi}{\omega_{2n-1}} \int_0^{2\pi} \left| P_\mu(re^{i\theta}) - \frac{m}{2\pi} \right|^2 d\theta, \end{aligned}$$

por lo que, de (3.41), deducimos que

$$\begin{aligned} I_{2n-2}(\nu) &\leq m^2 + \frac{4\pi^n}{(n-2)!} \int_0^1 \frac{2\pi}{\omega_{2n-1}} \int_0^{2\pi} \left| P_\mu(re^{i\theta}) - \frac{m}{2\pi} \right|^2 d\theta \frac{dr}{r} \\ &= m^2 + \frac{4\pi^n}{(n-2)!} \frac{1}{\omega_{2n-1}} I_0(\mu) \\ &= m^2 + (2n-2) I_0(\mu). \end{aligned}$$

Esto termina la prueba del Lema 3.10. ■

### 3.3. Aplicaciones de la expresión integral de la energía.

Como aplicación de las fórmulas del Teorema 5, veamos cómo podemos calcular la  $\alpha$ -capacidad de  $\Sigma_{N-1}$ .

En primer lugar, es claro que la  $\alpha$ -distribución de equilibrio de  $\Sigma_{N-1}$  es invariante por rotaciones, y, por tanto, coincide con la medida de Lebesgue (superficial) normalizada,  $\mu_{\Sigma_{N-1}} = |\cdot|/\omega_{N-1}$ . Como

$$P_{|\cdot|/\omega_{N-1}}(r\xi) \equiv \frac{1}{\omega_{N-1}}, \quad m = 1,$$

de (3.40) deducimos que

$$I_\alpha\left(\frac{|\cdot|}{\omega_{N-1}}\right) = U(\alpha),$$

y, por tanto, ( $0 < \alpha < N-1$ )

$$(3.42) \quad \text{cap}_\alpha(\Sigma_{N-1}) = \frac{1}{U(\alpha)} = \frac{\Gamma\left(\frac{N-\alpha}{2}\right) \Gamma\left(N-1-\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \Gamma(N-1-\alpha)}.$$

Por otro lado, por la parte ii) del Teorema 5, deducimos que

$$(3.43) \quad I_0\left(\frac{|\cdot|}{\omega_{N-1}}\right) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{N}{2}\right) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(N-1) \right] = U'(0),$$

de donde,

$$\text{cap}_0(\Sigma_{N-1}) = e^{-U'(0)}.$$

En particular, poniendo  $N = 2$ , obtenemos que  $\text{cap}_0(\partial\Delta) = 1$ .

Calculemos las capacidades logarítmicas de las esferas  $\Sigma_{N-1}$  ( $N > 1$ ).

Llamando

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}, \quad A(x) = \Psi\left(\frac{x}{2}\right) - \Psi(x-1),$$

de la relación  $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ , es fácil obtener que

$$\Psi(x+1) = \frac{1}{x} + \Psi(x).$$

Por otro lado, puesto que  $\Gamma'(1) = -\gamma$ , con  $\gamma$  la constante de Euler, se sigue que si  $M \in \mathbb{N}$ ,  $M > 1$ ,

$$\Psi(M) = \sum_{k=1}^{M-1} \frac{1}{k} - \gamma.$$

Distingamos ahora dos casos:

i) Si  $N$  es par, tanto  $N/2$  como  $N-1$  son naturales, por lo que

$$(3.44) \quad A(N) = \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N-2} \frac{1}{k} = - \sum_{k=N/2}^{N-2} \frac{1}{k}, \quad \text{si } N > 2,$$

$$A(2) = 0.$$

Por tanto,

$$(3.45) \quad \text{cap}_0(\Sigma_{2n-1}) = e^{-A(2n)/2} = \prod_{k=n}^{2n-2} e^{1/(2k)}, \quad (n > 1).$$

ii) Si  $N$  es impar,  $N/2$  no es natural, ahora bien,

$$\begin{aligned} \Psi\left(\frac{N}{2}\right) &= \frac{1}{\frac{N}{2}-1} + \frac{1}{\frac{N}{2}-2} + \cdots + \frac{1}{\frac{1}{2}} + \Psi\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2}{N-2} + \frac{2}{N-4} + \cdots + 2 + \Psi\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 2 \sum_{k=1}^{[N/2]} \frac{1}{N-2k} + \Psi\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Recordemos que

$$\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z}{k(z+k)}, \quad (z \neq -k, \ k \geq 0 \text{ entero}),$$

por lo que

$$\begin{aligned}\Psi\left(\frac{1}{2}\right) &= -\gamma - 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(2k+1)} \\ &= -\gamma - 2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= -\gamma - 2 + 2(1 - \log 2) = -\gamma - \log 4.\end{aligned}$$

Se sigue que si  $N$  es impar,  $N \geq 3$ ,

$$\begin{aligned}(3.46) \quad A(N) &= \Psi\left(\frac{N}{2}\right) - \Psi(N-1) \\ &= 2 \sum_{k=1}^{[N/2]} \frac{1}{N-2k} - \gamma - \log 4 - \sum_{k=1}^{N-2} \frac{1}{k} + \gamma \\ &= 2 \sum_{k=1}^{[N/2]} \frac{1}{N-2k} - \sum_{k=1}^{N-2} \frac{1}{k} - \log 4,\end{aligned}$$

y poniendo  $N = 2n + 1$  ( $n \geq 1$ ),

$$(3.47) \quad \text{cap}_0(\Sigma_{2n}) = e^{-A(2n+1)/2} = 2 \prod_{k=1}^{2n-1} e^{1/(2k)} \prod_{k=1}^n e^{-1/(1+2(n-k))}.$$

Por (3.45) y (3.47) tenemos para las primeras esferas que

$$\begin{aligned}\text{cap}_0(\Sigma_1) &= 1, & \text{cap}_0(\Sigma_2) &= 2e^{-1/2} \sim 1.213, \\ \text{cap}_0(\Sigma_3) &= e^{1/4} \sim 1.284, & \text{cap}_0(\Sigma_4) &= 2e^{-5/12} \sim 1.318, \\ \text{cap}_0(\Sigma_5) &= e^{7/24} \sim 1.339, & \text{cap}_0(\Sigma_6) &= 2e^{-47/120} \sim 1.351.\end{aligned}$$

El lento crecimiento de la sucesión  $\{\text{cap}_0(\Sigma_{N-1})\}$  parece indicar que esta sucesión es convergente como en efecto ocurre, pues si  $n > 1$ , por (3.44) y (3.46), tenemos que

$$A(2n) = - \sum_{k=n}^{2n-2} \frac{1}{k} \sim -\log \frac{2n-2}{n}, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

y

$$\begin{aligned}A(2n+1) &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2(n-k)+1} - \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k} - \log 4 \\ &= 2 \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n-1} \frac{1}{k} - \log 4 \\ &\sim 2 \log 2 - \log \frac{2n-1}{n+1} - \log 4 \\ &= -\log \frac{2n-1}{n+1}, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} A(N) = -\log 2,$$

de donde se deduce el sorprendente resultado

$$(3.48) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \text{cap}_0(\Sigma_{N-1}) = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-A(N)/2} = \sqrt{2}.$$

Para las  $\alpha$ -capacidades, puesto que

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z)} \sim z^a, \quad \text{cuando } |z| \rightarrow \infty,$$

en vista de (3.42), tenemos que

$$(3.49) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \text{cap}_\alpha(\Sigma_{N-1}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{N}{2}\right)^{-\alpha/2} (N-1)^{\alpha/2} = 2^{\alpha/2}.$$

Puesto que, si denotamos  $F(\alpha) = 2^{-\alpha/2}$ , se tiene que  $F'(0) = \log(1/\sqrt{2})$ , (3.48) y (3.49) concuerdan con el hecho de que

$$\left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} I_\alpha(\mu) = I_0(\mu).$$

Por otro lado, si denotamos por  $\Sigma_{\ell^2}$  la esfera unidad del espacio de sucesiones  $\ell^2$ , (3.48) y (3.49) pueden interpretarse como que

$$\text{cap}_\alpha(\Sigma_{\ell^2}) = 2^{\alpha/2}, \quad \text{cap}_0(\Sigma_{\ell^2}) = \sqrt{2}.$$

ya que los  $n$ -diámetros (ver la Sección 1.6) de  $\Sigma_{\ell^2}$  son

$$D_n^{(\alpha)}(\Sigma_{\ell^2}) = 2^{\alpha/2}. \quad D_n(\Sigma_{\ell^2}) = \sqrt{2}.$$

## Capítulo 4

### Aplicaciones y resultados adicionales en dimensión dos

Este Capítulo en el que veremos diversas aplicaciones de los resultados de los Capítulos 2 y 3 en dimensión dos, se estructura de la siguiente forma:

- 4.1. Precisión del Teorema 2.
- 4.2. Resultados ergódicos.
- 4.3. Extensiones del Teorema 2.

#### 4.1. Precisión del Teorema 2.

El siguiente resultado nos dice que el Teorema 2 es realmente lo mejor posible.

**Proposición 4.1.**  *$\text{cap}_\alpha(f^{-1}(E))$  puede tomar cualquier valor entre  $\text{cap}_\alpha(E)$  y  $\text{cap}_\alpha(\partial\Delta)$ . Más precisamente, dados  $0 < s \leq t < \text{cap}_\alpha(\partial\Delta)$ , existe un subconjunto de Borel  $E$  of  $\partial\Delta$  y una función interna  $f : \Delta \longrightarrow \Delta$  con  $f(0) = 0$ , tal que  $\text{cap}_\alpha(E) = s$  y  $\text{cap}_\alpha(f^{-1}(E)) = t$ .*

La Proposición anterior es un corolario del siguiente lema.

**Lema 4.1.** *Sea  $I$  cualquier intervalo cerrado en  $\partial\Delta$  con  $|I| > 0$ , y sea  $B$  una unión finita de intervalos cerrados en  $\partial\Delta$  tal que  $|B| = |I|$ . Entonces, existe una función interna  $f : \Delta \longrightarrow \Delta$  tal que*

$$f(0) = 0 \quad \text{y} \quad f^{-1}(I) \stackrel{\circ}{=} B.$$

*De hecho, si  $0 < |I| < 2\pi$ , entonces  $f$  es única.*

## OBSERVACIONES.

1) Ligeras modificaciones en la prueba del Lema 4.1 permiten también probar que si  $B$  es cualquier boreliano en  $\partial\Delta$  tal que  $|B| = |I|$ , entonces existe una función interna  $f$  con  $f(0) = 0$  y  $f^{-1}(I) \stackrel{\circ}{=} B$ , donde  $\stackrel{\circ}{=}$  denota igualdad salvo un conjunto de medida de Lebesgue nula.

2) Es natural preguntarse si este lema es cierto en dimensión superior, más precisamente:

*¿Es cierto que dado un intervalo  $I$  en  $\partial\Delta$  y un boreliano  $B$  de  $\mathbb{S}_n$  tal que*

$$\frac{|B|}{\omega_{2n-1}} = \frac{|I|}{2\pi},$$

*existe una función interna  $f: \mathbb{B}_n \rightarrow \Delta$  tal que  $f^{-1}(I) \stackrel{\circ}{=} B$  ?*

No es posible construir tal  $f$  usando los polinomios de Ryll-Wojtaszczyk (ver [R3]), (los polinomios utilizados por Aleksandrov para construir funciones internas en la bola unidad de  $\mathbb{C}^n$ ), puesto que es fácil ver que, en ese caso, también sería cierto el siguiente resultado más fuerte: *Dados  $E, I$  subconjuntos de  $\partial\Delta$  con  $|E| = |I|$  y  $N \in \mathbb{N}$ , existe una función interna  $f: \Delta \rightarrow \Delta$  tal que*

$$E = f^{-1}(I), \quad \text{y} \quad f^{(j)}(0) = 0, \quad \text{si } j \leq N.$$

Pero es fácil ver, como consecuencia del Lema 4.2 (ver más abajo), que esto no es posible en general.

En efecto, si  $I$  es un intervalo en  $\partial\Delta$ , ( $0 < |I| < 2\pi$ ), centrado en 1, y  $J_1, J_2$  son dos intervalos de medida  $|J_1| = |J_2| = |I|/2$  centrados en 1,  $-1$  y ponemos  $J = J_1 \cup J_2$ , es claro que  $f^{-1}(I) = J$  si  $f(z) = z^2$ . Por tanto, el Lema 4.2 nos dice que si  $g^{-1}(I) = J$ , con  $g$  interna y  $g(0) = 0$ , entonces forzosamente  $g(z) = z^2$ . Esto prueba que, en todo caso, no podemos fijar más allá de la segunda derivada.

La siguiente consecuencia de la Proposición 4.1 es conocida para la capacidad logarítmica (Ahlfors en [A, p. 35-36] la atribuye a A. Beurling). Que sepamos es nueva para las capacidades de Riesz. En cualquier caso es un bello resultado de simetrización.

**Corolario.** *Sea  $0 \leq \alpha < 1$ . Si  $I$  es cualquier intervalo en  $\partial\Delta$ , entonces  $I$  tiene la  $\alpha$ -capacidad mínima entre todos los borelianos de  $\partial\Delta$  con la misma medida de Lebesgue que  $I$ .*

**DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 4.1.** Sea  $u$  la integral de Poisson de la función característica de  $B$ , y sea  $\tilde{u}$  su función armónica conjugada elegida de forma que  $\tilde{u}(0) = 0$ . Puesto que  $u(0) = |B|/(2\pi)$ , la función holomorfa  $F = u + i\tilde{u}$  transforma  $\Delta$  en la banda  $S = \{\omega : 0 < \operatorname{Re} \omega < 1\}$ . Observemos que  $F$  tiene valores radiales frontera



excepto a lo sumo en un número finito de puntos y que  $F$  aplica el interior de  $B$  en  $\{\omega : \operatorname{Re} \omega = 1\}$  y  $\partial\Delta \setminus B$  en  $\{\omega : \operatorname{Re} \omega = 0\}$ .

Ahora, sea  $G$  la aplicación de Riemann de  $S$  elegida de forma que  $G(|B|/2\pi) = 0$ .  $G$  transforma  $\{\omega : \operatorname{Re} \omega = 1\}$  sobre un cierto intervalo  $J$  de  $\partial\Delta$ . Por otro lado, la función  $h = G \circ F$  es claramente una función interna,  $h(0) = 0$  y  $h^{-1}(I) = B$ . Componiendo  $h$  con rotación adecuada ( $|J| = |B| = |I|$  por el lema de Löwner) terminamos de demostrar el enunciado de existencia.

Para probar la unicidad de  $f$ , es suficiente probar el siguiente

**Lema 4.2.** *Si  $A$  es un subconjunto de Borel de  $\partial\Delta$ , tal que  $\int_A e^{-i\theta} d\theta \neq 0$ , y  $f, g$  son funciones internas con  $f(0) = g(0) = 0$  tales que*

$$f^{-1}(A) \stackrel{\circ}{=} g^{-1}(A),$$

entonces,  $f \equiv g$ .

$\stackrel{\circ}{=}$  denota igualdad salvo a lo sumo en un conjunto de medida de Lebesgue cero.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $F : \Delta \rightarrow \{\omega : 0 < \operatorname{Re} \omega < 1\}$  la función holomorfa dada por

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_A \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta.$$

$F$  es univalente en un entorno de 0 porque

$$F'(0) = \frac{1}{\pi} \int_A e^{-i\theta} d\theta \neq 0$$

por hipótesis. Ahora, observemos que  $\operatorname{Re}(F \circ f) = \operatorname{Re}(F \circ g)$  en casi todo punto de  $\partial\Delta$ . Puesto que  $\operatorname{Re}(F \circ f)$  y  $\operatorname{Re}(F \circ g)$  son funciones armónicas acotadas, se sigue que  $F \circ f = F \circ g + ic$  en  $\Delta$ , donde  $c$  es una constante real. Puesto que  $f(0) = g(0)$ , deducimos que  $F \circ f = F \circ g$ , lo que prueba el lema puesto que  $F$  es univalente en un entorno de 0.  $\square$

OBSERVACIONES.

1) En particular, la condición  $\int_A e^{-i\theta} d\theta \neq 0$  es satisfecha, por ejemplo, si  $A$  es un intervalo en  $\partial\Delta$  con  $0 < |A| < 2\pi$ .

2) La condición  $\int_A e^{-i\theta} d\theta \neq 0$  es más que de naturaleza técnica. Si  $A$  es  $k$ -simétrico (es decir, si existe un subconjunto  $A_0 \subset A$ , con  $A_0 \subset [0, 2\pi/k]$ , tal que  $A \stackrel{\circ}{=} A_0 \cup (A_0 + 2\pi/k) \cup (A_0 + 4\pi/k) \cup \dots \cup (A_0 + 2\pi(k-1)/k)$ , y  $\int_{A_0} e^{-ik\theta} d\theta \neq 0$ , entonces  $f = \omega g$ , donde  $\omega$  es una raíz  $k$ -ésima de la unidad. Para probar esto, uno puede usar el Lema 4.2 con las funciones  $h \circ f$ ,  $h \circ g$ , y el conjunto  $h(A)$ , donde  $h(z) = z^k$ .

Observemos también que si  $A$  es la unión de dos intervalos en  $\partial\Delta$ , entonces  $f = \pm g$ , porque la condición  $\int_A e^{-i\theta} d\theta = 0$  implica que  $A$  es 2-simétrico.

3) Notemos que si la función  $g$  en el Lema 4.2 fuera la identidad y  $0 < |A| < 2\pi$ , entonces, por ergodicidad, podríamos concluir que  $f$  es una rotación de ángulo racional. Esto, junto con la observación anterior parece sugerir que quizá la siguiente afirmación sea cierta:

*Si  $A$  es un subconjunto de Borel de  $\partial\Delta$ , tal que  $0 < |A| < 2\pi$ , y  $f, g$  son funciones internas con  $f(0) = g(0) = 0$  tales que*

$$f^{-1}(A) \stackrel{\circ}{=} g^{-1}(A),$$

*entonces  $f \equiv \lambda g$  con  $|\lambda| = 1$ .*

Pero esto es falso como muestra el siguiente ejemplo: Sea  $B$  el siguiente producto de Blaschke

$$B(z) = z \frac{2z - 1}{2 - z}.$$

Aplicando un teorema de K. Stephenson [S1, Teorema 3] al par  $B, -B$ , obtenemos dos funciones internas  $f$  y  $g$  con  $f(0) = g(0) = 0$ , tales que

$$B \circ f = -B \circ g.$$

Pero, entonces  $(B(f))^2 = (B(g))^2$ , y por tanto, si tuviéramos que  $f = \lambda g$ , podríamos concluir que  $B(z) = -B(\lambda z)$ . Pero, puesto que  $B'(0) \neq 0$ , tendríamos  $\lambda = -1$ , esto es,  $B(z) = -B(-z)$ , una contradicción.

## 4.2. Resultados ergódicos.

Lo siguiente no es inesperado puesto que la teoría ergódica nos dice que  $f^{-k}(E)$  está bien distribuido sobre  $\partial\Delta$ . En adelante,  $f^k = f \circ \cdots \circ f$  denotará la  $k$ -ésima iterada de  $f$ , y  $f^{-k}$  significará  $f^{-k} = (f^k)^{-1}$ .

**Proposición 4.2.** *Si  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  es interna pero no una rotación,  $f(0) = 0$ ,  $0 \leq \alpha < 1$ , y  $E$  es un subconjunto de Borel de  $\partial\Delta$  con  $\text{cap}_\alpha(E) > 0$ , entonces*

$$\text{cap}_\alpha(f^{-k}(E)) \rightarrow \text{cap}_\alpha(\partial\Delta) \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty.$$

La demostración de este resultado es una fácil consecuencia del siguiente lema.

**Lema 4.3.** *Con las hipótesis de la Proposición 4.2, si  $\mu$  es una probabilidad en  $E$  con  $\alpha$ -energía finita y si  $\nu_k$  es la medida de probabilidad en  $f^{-k}(E)$  tal que  $P_{\nu_k} = P_\mu \circ f^k$ , entonces*

$$I_\alpha(\nu_k) \rightarrow I_\alpha\left(\frac{|\cdot|}{2\pi}\right), \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty.$$

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 4.2. Por el lema, tenemos que

$$\frac{1}{\text{cap}_\alpha(\partial\Delta)} \leq \frac{1}{\text{cap}_\alpha(f^{-k}(E))} \leq I_\alpha(\nu_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} I_\alpha\left(\frac{|\cdot|}{2\pi}\right) = \frac{1}{\text{cap}_\alpha(\partial\Delta)}. \quad \blacksquare$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 4.3. Probaremos el caso  $0 < \alpha < 1$ ; el caso  $\alpha = 0$  es similar.

Por la parte i) del Teorema 3, tenemos que

$$I_\alpha(\sigma) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} |P_\sigma(re^{i\theta})|^2 d\theta G_\alpha(r) dr,$$

con

$$G_\alpha(r) = \frac{4\pi}{\Gamma(\alpha/2)\Gamma(1-\alpha/2)} r^{\alpha-1} (1-r^2)^{-\alpha},$$

para toda medida de probabilidad  $\sigma$  en  $\partial\Delta$ .

Usando el principio de subordinación (Lema 3.4), deducimos que, para todo  $r \in (0, 1)$ ,

$$\int_0^{2\pi} |P_{\nu_k}(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq \int_0^{2\pi} |P_\mu(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Puesto que  $\mu$  tiene  $\alpha$ -energía finita, el lado derecho de esta desigualdad, como una función en  $r$ , pertenece a  $L^1(G_\alpha(r) dr)$ . Por tanto, habremos terminado si probamos que

$$(4.1) \quad \int_0^{2\pi} |P_{\nu_k}(re^{i\theta})|^2 d\theta \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty,$$

para cada  $r \in (0, 1)$ , puesto que el teorema de la convergencia dominada nos daría que

$$I_\alpha(\nu_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{2\pi} G_\alpha(r) dr = I_\alpha\left(\frac{|\cdot|}{2\pi}\right).$$

Ahora bien, por definición de  $\nu_k$ ,  $P_{\nu_k}(re^{i\theta}) = P_\mu(f^k(re^{i\theta})) \rightarrow 1/(2\pi)$ , cuando  $k \rightarrow \infty$ , uniformemente en  $\theta$  para  $r$  fijo, puesto que  $f^k(re^{i\theta}) \rightarrow 0$ , cuando  $k \rightarrow \infty$ , uniformemente en  $\theta$  para  $r$  fijo, en virtud del lema de Schwarz. Esto implica (4.1).

El siguiente resultado nos dice que los conjuntos  $f^{-k}(E)$  están bien distribuidos sobre  $\partial\Delta$ , incluso en el caso en que  $\text{cap}_\alpha(E) = 0$ .

**Proposición 4.3.** Si  $f: \Delta \rightarrow \Delta$  es una función interna (distinta de una rotación) con  $f(0) = 0$ ,  $E$  es un boreliano no vacío en  $\partial\Delta$ , y  $\mu$  es cualquier medida de probabilidad en  $E$ , entonces, existen una constante absoluta  $C$  y una constante positiva  $A$  que sólo depende de  $|f'(0)|$ , tales que

$$\left| \nu_k(I) - \frac{|I|}{2\pi} \right| < C e^{-Ak},$$

para todo intervalo  $I \subseteq \partial\Delta$ . En particular,

$$\nu_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{|\cdot|}{2\pi}$$

en la topología débil-\*

Aquí  $\nu_k$  es la medida de probabilidad concentrada en  $\overline{f^{-k}(E)}$  tal que  $P_{\nu_k} = P_\mu \circ f^k$ .

DEMOSTRACIÓN. La relación  $P_{\nu_k} = P_\mu \circ f^k$  nos dice, en términos de medida armónica, que

$$(4.3) \quad \omega(\overline{f^{-k}(E)}, \nu_k, z) = \omega(E, \mu, f^k(z)), \quad z \in \Delta.$$

Recordemos que si  $\sigma$  es una medida en  $\partial\Delta$ ,  $E \subseteq \partial\Delta$ ,

$$\omega(E, \sigma, z) = \frac{1}{2\pi} \int_E \frac{1 - |z|^2}{|z - \xi|^2} d\sigma(\xi).$$

Por otro lado, si  $I$  es un intervalo (arco) en  $\partial\Delta$  y denotamos por  $I^\pm$  los intervalos con el mismo centro que  $I$  tales que  $|I^\pm| = |I| \pm \varepsilon$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\overline{f^{-k}(E)}} \omega(I^\pm, r\xi) d\nu_k(\xi) &= \int_{\overline{f^{-k}(E)}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{I^\pm} \frac{1 - r^2}{|\eta - r\xi|^2} d\eta \right\} d\nu_k(\xi) \\ &= \int_{I^\pm} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\overline{f^{-k}(E)}} \frac{1 - r^2}{|\eta - r\xi|^2} d\nu_k(\xi) \right\} d\eta \\ &= \int_{I^\pm} \omega(\overline{f^{-k}(E)}, \nu_k, r\eta) d\eta \\ &= \int_{I^\pm} \omega(E, \mu, f^k(r\eta)) d\eta. \end{aligned}$$

en virtud de (4.3). Como  $\nu_k(f^{-k}(E)) = 1$  (Lema 2.1), concluimos que

$$(4.4) \quad \int_{\overline{f^{-k}(E)}} \omega(I^\pm, r\xi) d\nu_k(\xi) = \int_{I^\pm} \omega(E, \mu, f^k(r\xi)) d\xi.$$

La idea, ahora, es comparar el lado izquierdo de (4.4) con  $|I^\pm|/(2\pi)$ ,

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\overline{f^{-k}(E)}} \omega(I^\pm, r\xi) d\nu_k(\xi) - \frac{|I^\pm|}{2\pi} \right| \\ &= \left| \int_{I^\pm} \omega(E, \mu, f^k(r\xi)) d\xi - \int_{I^\pm} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_E P(\eta, 0) d\mu(\eta) \right\} d\xi \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{I^\pm} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_E P(\eta, f^k(r\xi)) d\mu(\eta) \right\} d\xi - \int_{I^\pm} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_E P(\eta, 0) d\mu(\eta) \right\} d\xi \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{I^\pm} \int_E |P(\eta, f^k(r\xi)) - P(\eta, 0)| d\mu(\eta) d\xi \\
&\leq \frac{|I^\pm|}{2\pi} \max_{\substack{|\eta|=1 \\ |\xi|=1}} |P(\eta, f^k(r\xi)) - 1|.
\end{aligned}$$

Como, por el lema de Schwarz,  $f^k \rightarrow 0$  uniformemente sobre compactos, se sigue que para  $n \geq n_0 = n_0(\varepsilon)$ ,

$$(4.5) \quad \left| \int_{f^{-k}(E)} \omega(I^\pm, r\xi) d\nu_k(\xi) - \frac{|I^\pm|}{2\pi} \right| \leq C M(f^k, r),$$

donde

$$M(f^k, r) = \max_{|z|=r} |f^k(z)|.$$

Ahora, fijado  $\varepsilon > 0$ , sea  $r = r(\varepsilon)$  tal que ( $r = 1 - \varepsilon^4$  sirve)

$$\frac{1 - r^2}{|e^{i\varepsilon} - r|^2} \leq \varepsilon.$$

Entonces, es fácil comprobar que para  $r = r(\varepsilon)$ ,

$$(4.6) \quad \omega(I^+, r\xi) \geq 1 - \varepsilon + \varepsilon \frac{|I^+|}{2\pi} \geq 1 - \varepsilon, \quad \text{si } \xi \in I,$$

y que

$$(4.7) \quad \omega(I^-, r\xi) \leq \varepsilon \frac{|I^-|}{2\pi} \leq \varepsilon, \quad \text{si } \xi \notin I.$$

Por tanto, usando (4.6),

$$\begin{aligned}
(4.8) \quad \int_{f^{-k}(E)} \omega(I^+, r\xi) d\nu_k(\xi) &\geq \int_{f^{-k}(E) \cap I} \omega(I^+, r\xi) d\nu_k(\xi) \\
&\geq (1 - \varepsilon) \nu_k(f^{-k}(E) \cap I) \\
&= (1 - \varepsilon) \nu_k(I) \\
&\geq \nu_k(I) - \varepsilon,
\end{aligned}$$

y, por (4.7),

$$\begin{aligned}
(4.9) \quad \int_{f^{-k}(E)} \omega(I^-, r\xi) d\nu_k(\xi) &= \int_{f^{-k}(E) \cap I} \omega(I^-, r\xi) d\nu_k(\xi) \\
&\quad + \int_{f^{-k}(E) \setminus I} \omega(I^-, r\xi) d\nu_k(\xi) \\
&\leq \nu_k(I) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Finalmente, (4.5), (4.8) y (4.9) implican que

$$(4.10) \quad \left| \nu_k(I) - \frac{|I|}{2\pi} \right| \leq C (M(f^k, r) + \varepsilon),$$

con  $r = r(\varepsilon) = 1 - \varepsilon^4$ .

Recordemos ahora el espectacular resultado de Ch. Pommerenke siguiente

**Lema 4.4** (Pommerenke [P2, Lema 2]). *Sea  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  una función holomorfa con  $f(0) = 0$ . Entonces*

$$M(f^k, r) \leq a^k \left( \frac{1}{1-r} \right)^N,$$

donde  $N$  es una constante absoluta ( $N = 13$  sirve), y

$$a = \max \left\{ |f'(0)|, \frac{1}{2} \right\}.$$

Con esto, tomando para cada  $k$ ,  $\varepsilon_k = a^{k/(8N)}$ , (4.10) nos da que

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \left| \nu_k(I) - \frac{|I|}{2\pi} \right| &\leq C (a^k \varepsilon_k^{-4N} + \varepsilon_k) \\ &\leq C (a^k a^{-k/2} + a^{k/(8N)}) \\ &\leq C a^{k/N_1} \\ &\leq C e^{-k(1-a)/N_1}. \end{aligned}$$

con  $N_1$  una cierta constante absoluta. ■

#### OBSERVACIONES.

1) La prueba de la Proposición 4.3 sigue básicamente la línea del Lema 3 en [P2]. Dicho lema (enunciado en la Sección 1 como Proposición 1.5) es un resultado de mezcla uniforme muy fuerte. En la Sección 4.3, como consecuencia de una mejora del Teorema 2, obtendremos un resultado parcial de mezcla con  $\alpha$ -capacidad.

2) La convergencia débil-\*,  $\nu_k \rightarrow |\cdot|/(2\pi)$ , se sigue fácilmente de (4.11). Sin embargo, hay que decir que la relación  $P_{\nu_k} = P_\mu \circ f$  que define a las probabilidades  $\nu_k$  junto con el teorema de Banach-Alaoglu también implican tal convergencia débil-\*.

Obsérvese que una consecuencia de la Proposición 4.3 es

**Corollary.** *Si  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  es interna, entonces  $f$  toma todos los valores en  $\partial\Delta$ .*

### 4.3. Extensiones del Teorema 2.

Cuando la función interna  $f$  tiene orden  $k \geq 1$  en 0, podemos mejorar el Teorema 2. En el caso  $\alpha=0$ , tenemos

**Teorema 6** ([FPR]). *Si  $f: \Delta \rightarrow \Delta$  es interna,*

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(k-1)}(0) = 0, \quad f^{(k)}(0) \neq 0, \quad (k \geq 1),$$

*y  $E$  es un boreliano de  $\partial\Delta$ , entonces*

$$(4.12) \quad \text{cap}_0(f^{-1}(E)) \geq (\text{cap}_0(E))^{1/k}.$$

*Además, si  $\text{cap}_0(E) > 0$ , la igualdad en (4.12) sólo puede darse si o bien  $f(z) = \lambda z^k$  con  $|\lambda| = 1$ , o bien  $\text{cap}_0(E) = \text{cap}_0(\partial\Delta)$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Para una tal función, el lema de Schwarz nos dice que  $|f(z)| \leq |z|^k$ , con igualdad sólo si  $f(z) = \lambda z^k$  con  $|\lambda| = 1$ . Con esto en mente, el principio de subordinación (Lema 3.4) nos diría ahora que si  $v: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  es una función subarmónica, entonces

$$\int_0^{2\pi} v(f(re^{i\theta})) d\theta \leq \int_0^{2\pi} v(r^k e^{i\theta}) d\theta,$$

con igualdad para un  $r$  dado, sólo si  $v$  es armónica en  $\Delta_r$  ó  $f$  es una rotación de  $z^k$  (ver, por ejemplo, [HH]).

Ahora, para probar (4.12), es suficiente suponer que  $E$  es cerrado. Si  $\mu_e$  es la distribución logarítmica de equilibrio de  $E$ , y  $\nu$  es la medida de probabilidad en  $f^{-1}(E)$  tal que  $P_\nu = P_\mu \circ f$ , entonces

$$\begin{aligned} I_0(\nu) &= 2\pi \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| P_{\mu_e}(f(re^{i\theta})) - \frac{1}{2\pi} \right|^2 d\theta \frac{dr}{r} \\ &\leq 2\pi \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| P_{\mu_e}(r^k e^{i\theta}) - \frac{1}{2\pi} \right|^2 d\theta \frac{dr}{r}. \end{aligned}$$

Haciendo  $r^k = t$ , obtenemos que

$$I_0(\nu) \leq \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| P_{\mu_e}(te^{i\theta}) - \frac{1}{2\pi} \right|^2 d\theta \frac{1}{k} \frac{dt}{t} = \frac{1}{k} I_0(\mu_e),$$

de donde (4.12). El enunciado de igualdad se prueba de forma análoga al correspondiente enunciado del Teorema 2. ■

En el caso  $0 < \alpha < 1$ , si uno procede de forma análoga, tiene que, por subordinación

$$\begin{aligned} I_\alpha(\nu) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} |P_{\mu_\epsilon}(f(re^{i\theta}))|^2 d\theta G_\alpha(r) dr \\ &\leq \int_0^1 \int_0^{2\pi} |P_{\mu_\epsilon}(r^k e^{i\theta})|^2 d\theta G_\alpha(r) dr, \end{aligned}$$

y haciendo  $r^k = t$ ,

$$\begin{aligned} I_\alpha(\nu) &\leq \int_0^1 \int_0^{2\pi} |P_{\mu_\epsilon}(te^{i\theta})|^2 d\theta G_\alpha(t^{1/k}) \frac{1}{k} t^{-1+1/k} dt \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} |P_{\mu_\epsilon}(te^{i\theta})|^2 d\theta H_\alpha(t) dt, \end{aligned}$$

donde,

$$H_\alpha(t) = \frac{C_\alpha}{k} t^{-1+\alpha/k} (1 - t^{2/k})^{-\alpha}, \quad C_\alpha = \frac{4\pi}{\Gamma(\alpha/2) \Gamma(1 - \alpha/2)}.$$

Observemos que  $H_\alpha(t)$  se parece a  $G_{\alpha/k}(t)$ , pero la relación entre ambas funciones va en el sentido “malo”. No obstante, quizá  $H_\alpha(t)$  pudiera corresponder a un núcleo integral, distinto del de Riesz, pero calculable. Si fuera así, tendríamos

$$I_\alpha(\nu) \leq \tilde{I}_\alpha(\mu_\epsilon),$$

de donde

$$\text{cap}_\alpha(f^{-1}(E)) \geq \widetilde{\text{cap}_\alpha}(E).$$

Llamemos  $\tilde{\Phi}_\alpha$  al (hipotético) núcleo tal que

$$\begin{aligned} \tilde{I}_\alpha(\mu) &= \iint_{E \times E} \tilde{\Phi}_\alpha(|x - y|) d\mu(x) d\mu(y) \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{2\pi} |P_\mu(re^{i\theta})|^2 d\theta \right\} H_\alpha(r) dr, \end{aligned}$$

para toda medida con signo  $\mu$  soportada en  $\partial\Delta$ . Si  $\tilde{\gamma}_{n,\alpha}$  y  $\hat{\mu}(n)$  denotan, respectivamente, los coeficientes de Fourier del núcleo  $\tilde{\Phi}_\alpha(|1 - e^{it}|)$  y de la medida  $\mu$ , entonces, como vimos en el Capítulo 3,

$$\tilde{I}_\alpha(\mu) = 4\pi^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{\mu}(n)|^2 \tilde{\gamma}_{n,\alpha},$$



y, por otro lado, por el teorema de Plancherel

$$\begin{aligned}\tilde{I}_\alpha(\mu) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} |P_\mu(re^{i\theta})|^2 d\theta H_\alpha(r) dr \\ &= 2\pi \int_0^1 \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{2|n|} |\hat{\mu}(n)|^2 \right) H_\alpha(r) dr \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{\mu}(n)|^2 \int_0^1 r^{2|n|} H_\alpha(r) dr.\end{aligned}$$

Por tanto, se debe verificar que  $(\tilde{\gamma}_{n,\alpha} = \tilde{\gamma}_{-n,\alpha})$ ,

$$2\pi \tilde{\gamma}_{n,\alpha} = \int_0^1 r^{2n} H_\alpha(r) dr, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Poniendo  $r^2 = t$ , nos queda que

$$\tilde{\gamma}_{n,\alpha} = \frac{C_\alpha}{4k\pi} \int_0^1 t^{-1+n+\alpha/(2k)} (1-t^{1/k})^{-\alpha} dt,$$

y, haciendo  $t^{1/k} = u$ , obtenemos que

$$\begin{aligned}(4.13) \quad \tilde{\gamma}_{n,\alpha} &= \frac{C_\alpha}{4\pi} \int_0^1 u^{-1+kn+\alpha/2} (1-u)^{-\alpha} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/2) \Gamma(1-\alpha/2)} B(1-\alpha, kn + \frac{\alpha}{2}).\end{aligned}$$

Comparando (4.13) con (3.24) vemos que

$$\tilde{\gamma}_{n,\alpha} = \gamma_{kn,\alpha}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

donde  $\gamma_{n,\alpha}$  son los coeficientes de Fourier del núcleo de Riesz,  $\Phi_\alpha(|1 - e^{it}|) = |1 - e^{it}|^{-\alpha}$ . Esto significa que

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_\alpha(|1 - e^{it}|) &= \sum_{j=0}^{k-1} \Phi_\alpha(|1 - e^{i(t+2\pi j/k)}|) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{|1 - e^{i(t+2\pi j/k)}|^\alpha}.\end{aligned}$$

Obsérvese que el núcleo obtenido ¡depende de  $k$ ! Esto significa que obtenemos un resultado no sólo con capacidades diferentes sino que, además, una de ellas depende de  $k$ , el orden de  $f$  en 0. En otras palabras, un resultado no muy satisfactorio.

El problema principal que nos hemos encontrado es que las funciones  $G_\alpha(r)$  que aparecen en la expresión integral de la energía no se "reescalan" bien al hacer el cambio de variable  $r = t^{1/k}$ . En el siguiente teorema "cambiamos" las funciones  $G_\alpha(r)$  por otras que nos permiten soslayar este problema.

**Teorema 7.** Si  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  es interna,

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(k-1)}(0) = 0, \quad f^{(k)}(0) \neq 0, \quad (k \geq 1),$$

y  $E$  es un boreliano en  $\partial\Delta$ , entonces para  $0 < \alpha < 1$ ,

$$(4.14) \quad \frac{1}{\text{cap}_\alpha(f^{-1}(E))} - \frac{1}{\text{cap}_\alpha(\partial\Delta)} \leq \frac{C_\alpha}{k^{1-\alpha}} \left( \frac{1}{\text{cap}_\alpha(E)} - \frac{1}{\text{cap}_\alpha(\partial\Delta)} \right).$$

donde  $C_\alpha \geq 1$  es una constante que depende sólo de  $\alpha$ .

Necesitaremos el siguiente

**Lema 4.5.** Existe una constante  $C_\alpha \geq 1$  tal que para toda medida de probabilidad  $\mu$  soportada en  $\partial\Delta$ ,

$$\frac{1}{C_\alpha} J_\alpha(\mu) \leq I_\alpha(\mu) - \gamma_{0,\alpha} \leq C_\alpha J_\alpha(\mu), \quad 0 \leq \alpha < 1,$$

donde

$$J_\alpha(\mu) = \iint_{\Delta} \left| P_\mu(z) - \frac{1}{2\pi} \right|^2 \frac{dx dy}{|z|^2 \left( \log \frac{1}{|z|} \right)^\alpha}.$$

DEMOSTRACIÓN. Observemos que, usando el teorema de Plancherel

$$\begin{aligned} J_\alpha(\mu) &= 2\pi \int_0^1 \left( \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} r^{2|n|} |\hat{\mu}(n)|^2 \right) \frac{dr}{r \left( \log \frac{1}{r} \right)^\alpha} \\ &= 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{\mu}(n)|^2 \int_0^1 r^{2n-1} \frac{dr}{\left( \log \frac{1}{r} \right)^\alpha} \\ &= \frac{4\pi}{2^{1-\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{\mu}(n)|^2 \int_0^{\infty} t^{-\alpha} e^{-nt} dt \\ &= \frac{4\pi}{2^{1-\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{\mu}(n)|^2 \mathcal{L} \left[ \frac{1}{t^\alpha} \right] (n), \end{aligned}$$

y, puesto que la transformada de Laplace de  $t^{-\alpha}$  es  $\Gamma(1-\alpha)/s^{1-\alpha}$ , obtenemos que

$$(4.15) \quad J_\alpha(\mu) = 4\pi \frac{\Gamma(1-\alpha)}{2^{1-\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{\mu}(n)|^2 n^{\alpha-1}.$$

Por otro lado, puesto que

$$\frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n)} \sim n^a \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty, \quad a > 0,$$

de (3.24) se deduce fácilmente que  $\gamma_{n,\alpha} \sim n^{\alpha-1}$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por tanto,

$$I_\alpha(\mu) - \gamma_{0,\alpha} = 4\pi^2 \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} |\hat{\mu}(n)|^2 \gamma_{n,\alpha} = 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{\mu}(n)|^2 \gamma_{n,\alpha},$$

que, junto con (4.15), implica el lema. ■

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 7. Observemos, en primer lugar, que por la invariancia por rotaciones de la medida de Lebesgue

$$\frac{1}{\text{cap}_\alpha(\partial\Delta)} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|1 - e^{i(s-t)}|^\alpha} \frac{dt}{2\pi} \frac{ds}{2\pi} = \gamma_{0,\alpha} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi} = \gamma_{0,\alpha}.$$

Es suficiente probar (4.14) para  $E$  cerrado. Como en el Teorema 6, si  $\mu_e$  es su distribución de equilibrio, por subordinación, obtenemos que si  $\nu$  es la probabilidad en  $f^{-1}(E)$  tal que  $P_\nu = P_\mu \circ f$ , entonces

$$\begin{aligned} J_\alpha(\nu) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| P_{\mu_e}(f(re^{i\theta})) - \frac{1}{2\pi} \right|^2 d\theta \frac{dr}{r \left( \log \frac{1}{r} \right)^\alpha} \\ &\leq \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| P_{\mu_e}(r^k e^{i\theta}) - \frac{1}{2\pi} \right|^2 d\theta \frac{dr}{r \left( \log \frac{1}{r} \right)^\alpha} \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| P_{\mu_e}(te^{i\theta}) - \frac{1}{2\pi} \right|^2 d\theta \frac{\frac{1}{k} t^{-1+1/k}}{t^{1/k} \left( \log \frac{1}{t^{1/k}} \right)^\alpha} dt \\ &= \frac{1}{k^{1-\alpha}} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| P_{\mu_e}(te^{i\theta}) - \frac{1}{2\pi} \right|^2 d\theta \frac{dt}{t \left( \log \frac{1}{t} \right)^\alpha} \\ &= \frac{1}{k^{1-\alpha}} J_\alpha(\mu_e). \end{aligned}$$

Por tanto, usando el Lema 4.5,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{cap}_\alpha(f^{-1}(E))} - \frac{1}{\text{cap}_\alpha(\partial\Delta)} &\leq I_\alpha(\nu) - \gamma_{0,\alpha} \\ &\leq C_\alpha J_\alpha(\nu) \\ &\leq \frac{C_\alpha}{k^{1-\alpha}} J_\alpha(\mu_e) \\ &\leq \frac{C_\alpha^2}{k^{1-\alpha}} (I_\alpha(\mu_e) - \gamma_{0,\alpha}) \\ &= \frac{C_\alpha^2}{k^{1-\alpha}} \left( \frac{1}{\text{cap}_\alpha(E)} - \frac{1}{\text{cap}_\alpha(\partial\Delta)} \right), \end{aligned}$$

lo que prueba el teorema. ■

OBSERVACIÓN. Si el orden de  $f$  en 0 es  $k > 1$ , esto es,  $f'(0) = 0$ , entonces, puesto que  $\text{ord}(f^n, 0) = k^n$ , donde  $f^n$  denota la  $n$ -ésima iterada de  $f$ , por los Teoremas 6 y 7, se obtiene que si  $\text{cap}_\alpha(E) > 0$ ,

$$\text{cap}_\alpha(f^{-n}(E)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{cap}_\alpha(\partial\Delta), \quad 0 \leq \alpha < 1,$$

es decir, la Proposición 4.2.

Esto sugiere que si  $k = \text{ord}(f, 0) > 1$ , de los Teoremas 6 y 7, podremos obtener propiedades ergódicas de  $f$ . En efecto,

**Proposición 4.4.** *Sea  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  una función interna tal que*

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(k-1)}(0) = 0, \quad f^{(k)}(0) \neq 0, \quad (k > 1).$$

*Si  $A$  es un boreliano en  $\partial\Delta$  tal que  $|A| > 0$  y para todo  $n \in \mathbb{N}$  existen borelianos  $E_n$  en  $\partial\Delta$  tales que la  $\alpha$ -capacidad ( $0 \leq \alpha < 1$ ) de la diferencia simétrica entre  $A$  y  $f^{-n}(E_n)$  es nula, entonces  $\text{cap}_\alpha(A) = \text{cap}_\alpha(\partial\Delta)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $0 < \alpha < 1$ ; la prueba para  $\alpha = 0$  es similar pero usando el Teorema 6 en lugar del Teorema 7. La hipótesis implica que  $\text{cap}_\alpha(A) = \text{cap}_\alpha(f^{-n}(E_n))$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Puesto que  $\text{ord}(f^n, 0) = k^n$ , el Teorema 7 nos dice que

$$(4.16) \quad \frac{1}{\text{cap}_\alpha(A)} - \frac{1}{\text{cap}_\alpha(\partial\Delta)} = \frac{1}{\text{cap}_\alpha(f^{-n}(E_n))} - \frac{1}{\text{cap}_\alpha(\partial\Delta)} \\ \leq \frac{C_\alpha}{k^{n(1-\alpha)}} \left( \frac{1}{\text{cap}_\alpha(E_n)} - \frac{1}{\text{cap}_\alpha(\partial\Delta)} \right),$$

si  $\text{cap}_\alpha(E_n) > 0$ . Ahora bien, de la hipótesis se sigue que no sólo la  $\alpha$ -capacidad sino también la medida de Lebesgue de la diferencia simétrica entre  $A$  y  $f^{-n}(E_n)$  es nula. Por el lema de Löwner se sigue que  $|A| = |E_n|$  para todo  $n$ . Si  $I$  es un intervalo en  $\partial\Delta$  con  $|I| = |A|$ , entonces, como vimos en la Sección 4.1 como corolario de la Proposición 4.1,  $\text{cap}_\alpha(E_n) \geq \text{cap}_\alpha(I) > 0$ , para todo  $n$ . La Proposición sigue ahora de (4.16), haciendo  $n \rightarrow \infty$ . ■

OBSERVACIÓN. Si pudiéramos sustituir la condición  $|A| > 0$  por  $\text{cap}_\alpha(A) > 0$  en la Proposición 4.4, esto nos diría que una función interna con  $f(0) = f'(0) = 0$ , es exacta con respecto a la  $\alpha$ -capacidad.

El problema es que los  $E_n$  podrían, en principio, tener capacidad nula ó tendiendo a cero. La condición  $|A| > 0$  evita esta posibilidad pues implica que  $\text{cap}_\alpha(E_n) \geq c > 0$ .

CONJETURA. La constante correcta en el Teorema 7, es  $C_\alpha = 1$ . Esto permitiría seguramente, dar un enunciado de unicidad como en los Teoremas 2 y 6.

## Capítulo 5

### Distorsión de subconjuntos del disco por funciones internas

En este capítulo veremos dos resultados de distorsión de subconjuntos  $E$  de  $\Delta$ ; en la primera sección enunciaremos y daremos la prueba de un teorema de D. Hamilton [H2] sobre distorsión de medidas de Hausdorff. Este resultado es una “secuela” de la primera versión del Teorema 2, aparecida en [FP], en la que se probaba que si  $E \subseteq \partial\Delta$  entonces,  $\text{cap}_\alpha(f^{-1}(E)) \geq C_\alpha \text{cap}_\alpha(E)$ , con una cierta constante  $C_\alpha > 0$ . En [H2], D. Hamilton conjeturó que se podía poner  $C_\alpha = 1$ , como así resultó ser; en la segunda sección probaremos el resultado de distorsión de la capacidad logarítmica [FPR] para subconjuntos del disco (ver Teorema 8). El Teorema da la misma desigualdad que en el caso de subconjuntos de la circunferencia unidad (Teorema 6). La prueba utiliza fuertemente la invariancia conforme de la capacidad logarítmica. Finalmente, también probamos que el Teorema 8 no se puede mejorar. El Capítulo se estructura de la siguiente manera:

5.1. Distorsión de medidas de Hausdorff: Teorema de Hamilton.

5.2. Distorsión de la capacidad logarítmica.

#### **5.1. Distorsión de medidas de Hausdorff: Teorema de Hamilton.**

Recientemente D. Hamilton ha probado el siguiente

**Teorema D** (Hamilton, [H2]). Si  $f: \Delta \rightarrow \Delta$  es una función interna con  $f(0) = 0$ , y si  $E$  es un boreliano de  $\Delta$ , entonces

$$H_\alpha(f^{-1}(E)) \geq H_\alpha(E), \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Además, si hay igualdad para algún  $E$  con  $H_\alpha(E) > 0$ , entonces  $f(z) = \lambda z$ , con  $|\lambda| = 1$ , es decir,  $f$  es una rotación.

Recordemos que  $H_\alpha$  denota la medida de Hausdorff  $\alpha$ -dimensional.

#### OBSERVACIONES.

1) El resultado es, con seguridad, falso para  $1 < \alpha \leq 2$ . En efecto, si  $E = \Delta(w, \varepsilon) = \{z \in \Delta : |z - w| < \varepsilon\}$  con  $\varepsilon > 0$  y pequeño,  $H_\alpha(E) \sim \varepsilon^\alpha$ , cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ; si denotamos por  $f_n(z) = z^n$ ,  $f_n^{-1}(E)$  se compone de  $n$  "discos" de radio  $\varepsilon/|f'(f^{-1}(w))|$  con centro en las raíces  $n$ -ésimas de  $w$ . Por tanto,

$$\frac{H_\alpha(f_n^{-1}(E))}{H_\alpha(E)} \sim \frac{n \left( \frac{\varepsilon}{n |w|^{(n-1)/n}} \right)^\alpha}{\varepsilon^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-1} |w|^{\alpha(n-1)/n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

si  $\alpha > 1$ .

2) No obstante, puesto que  $f$  es localmente Lipschitz, siempre se tiene que

$$\text{Dim}(f^{-1}(E)) \geq \text{Dim}(E).$$

La prueba del Teorema D se basa en

**Teorema E** (Frostman, [G, p. 79]) Sea  $f: \Delta \rightarrow \Delta$  una función interna. Para todos los  $w \in \Delta$ , excepto para (posiblemente) un conjunto de capacidad logarítmica nula,

$$\frac{f(z) - w}{1 - \bar{w} f(z)} = c_0 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_n}{|a_n|} \frac{z - a_n}{1 - \bar{a}_n z},$$

donde  $|c_0| = 1$ , y los  $a_n$  son las raíces de la ecuación  $f(z) = w$ , contando multiplicidades. (Si  $a_n = 0$  se entiende que  $\bar{a}_n/|a_n| = 1$ ).

En particular  $f$  omite (a lo más) un conjunto de capacidad logarítmica nula.

Observemos que si  $f(0) = 0$ , entonces

$$(5.1) \quad |w| = \prod_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Por otro lado, una conocida extensión del lema de Schwarz debida a Pick (ver, por ejemplo, [A, p. 3], nos dice que

$$(5.2) \quad \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Sumando sobre todos los  $a_n$  tales que  $f(a_n) = w$ , obtenemos por (5.2) que

$$(5.3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|f'(a_n)|} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - |a_n|^2}{1 - |w|^2} \geq 1,$$

en virtud del siguiente

**Lema 5.1.** *Para todo  $Y$ ,  $0 < Y \leq 1$ , y para toda sucesión  $\{X_n\}$ ,  $0 < X_n \leq 1$ , tal que*

$$Y = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$$

*se tiene que*

$$(5.4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (1 - X_n)^2 \geq 1 - Y^2,$$

*con igualdad sólo si todos los  $X_n$  son 1, con a lo más una excepción.*

**DEMOSTRACIÓN.** En primer lugar, para todo  $N$ ,  $N = 1, 2, 3, \dots$ , es fácil ver por inducción que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N (1 - X_n^2) &\geq (1 - X_1^2) \left(1 - \prod_{n=2}^N X_n^2\right) + 1 - \prod_{n=1}^N X_n^2 \\ &\geq 1 - \prod_{n=1}^N X_n^2. \end{aligned} \quad 5.5$$

En efecto, si  $N = 1$  esto es claro, y supuesto para  $N - 1$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N (1 - X_n^2) &= 1 - X_1^2 + \sum_{n=2}^N (1 - X_n^2) \\ &\geq 1 - X_1^2 + 1 - \prod_{n=2}^N X_n^2 \\ &= \prod_{n=1}^N X_n^2 - X_1^2 + 1 - \prod_{n=2}^N X_n^2 + 1 - \prod_{n=1}^N X_n^2 \\ &= (1 - X_1^2) \left(1 - \prod_{n=2}^N X_n^2\right) + 1 - \prod_{n=1}^N X_n^2 \\ &\geq 1 - \prod_{n=1}^N X_n^2. \end{aligned}$$

lo que prueba (5.4) haciendo  $N \rightarrow \infty$ . De hecho, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - X_n^2) &\geq (1 - X_1^2) \left(1 - \prod_{n=2}^{\infty} X_n^2\right) + 1 - \prod_{n=1}^{\infty} X_n^2 \\ &\geq 1 - \prod_{n=1}^{\infty} X_n^2. \end{aligned}$$

Para probar el enunciado de igualdad, observemos que si  $Y = 1$  todos los  $X_n$  son unos y no hay nada que probar. Si  $Y < 1$ , uno al menos de los  $X_n$ , digamos  $X_1$ , debe ser menor que 1, y si tenemos igualdad en (5.4), forzosamente

$$(1 - X_1^2) \left(1 - \prod_{n=2}^{\infty} X_n^2\right) = 0,$$

de donde, como  $X_1 < 1$ , se tiene que  $X_n = 1$  para todo  $n \geq 2$ . ■

Esto prueba (5.3), excepto quizás en un conjunto de  $w$ 's de capacidad logarítmica nula. Además, la igualdad en (5.3) sólo puede darse si

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 - |a_n|^2 = 1 - |w|^2,$$

y, por (5.1) y el Lema 5.1, esto sólo es posible si  $|a_n| = 1$  para todo  $n$ , excepto (a lo más) para un valor, digamos  $a_1$ , en cuyo caso  $|a_1| = |w|$ , es decir,  $|f(a_1)| = |w| = |a_1|$ . En este caso, el lema de Schwarz nos dice que  $f$  es una rotación. Hemos probado, por tanto,

**Lema 5.2.** *Si  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  es interna con  $f(0) = 0$ , entonces para todo  $w$ , excepto a lo más en un conjunto de capacidad logarítmica nula,*

$$\sum_{\substack{n=1 \\ f(a_n)=w}}^{\infty} \frac{1}{|f'(a_n)|} \geq 1,$$

con igualdad sólo si  $f(z) = \lambda z$ ,  $|\lambda| = 1$ .

**DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA D.** En primer lugar, recordemos que si  $f$  es una función Lipschitz sobre un espacio métrico  $X$ , entonces

$$H_\alpha(f(X)) \leq (\text{Lip}(f))^\alpha H_\alpha(X).$$

Este hecho, es una fácil consecuencia de la definición de medida de Hausdorff. Ahora, si  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  es analítica, podemos dividir  $\Delta$  en una colección numerable de triángulos “abierto- cerrados”  $T_n$ , de forma que, en cada triángulo  $T_n$ ,  $f$  es inyectiva



y  $|f'|$  es aproximadamente constante,  $|f'| \sim \text{Lip}_{T_n}(f)$ . Por tanto, sumando ( $H_\alpha$  es una medida) sobre todos los triángulos y pasando al límite cuando el diámetro de los triángulos tiende a cero, obtenemos que

$$\begin{aligned} H_\alpha(f^{-1}(E)) &= \sum_n H_\alpha(f^{-1}(E) \cap T_n) \\ &\geq \sum_n \frac{1}{(\text{Lip}_{T_n}(f))^\alpha} H_\alpha(E \cap f(T_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_E \sum_{f(a_n)=w} \frac{1}{|f'(a_n)|^\alpha} dH_\alpha(w). \end{aligned}$$

Ahora bien, como  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $\|\{x_n\}\|_\alpha \geq \|\{x_n\}\|_1$ , de donde

$$\sum_{f(a_n)=w} \frac{1}{|f'(a_n)|^\alpha} \geq \left( \sum_{f(a_n)=w} \frac{1}{|f'(a_n)|} \right)^\alpha \geq 1,$$

en virtud del Lema 5.2, excepto a lo más para un conjunto de  $w$ 's de capacidad logarítmica nula y, por tanto, de medida de Hausdorff  $H_\alpha$  nula. Por tanto,

$$H_\alpha(f^{-1}(E)) \geq \int_E \sum_{f(a_n)=w} \frac{1}{|f'(a_n)|^\alpha} dH_\alpha(w) \geq \int_E dH_\alpha(w) = H_\alpha(E). \quad \blacksquare$$

## 5.2. Distorsión de la capacidad logarítmica.

En esta sección probaremos el siguiente resultado (compárese con el Teorema 6 en el Capítulo 4).

**Teorema 8.** Si  $f: \Delta \rightarrow \Delta$  es interna,

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(k-1)}(0) = 0, \quad f^{(k)}(0) \neq 0. \quad (k \geq 1),$$

entonces

$$(5.6) \quad \text{cap}_0(f^{-1}(E)) \geq (\text{cap}_0(E))^{1/k},$$

para todos los borelianos de  $\Delta$ . Además la desigualdad no se puede mejorar.

Si  $f$  es un producto de Blaschke finito, entonces (5.6) es válida para todos los borelianos de  $\overline{\Delta}$  y, además, la igualdad en (5.6) sólo puede darse, si  $E \subseteq \overline{\Delta}$  es un compacto con  $\text{cap}_0(E) > 0$ , si o bien  $f(z) = \lambda z^k$ ,  $|\lambda| = 1$ , o bien  $\text{cap}_0(E) = \text{cap}_0(\overline{\Delta}) = \text{cap}_0(\partial\Delta)$ .

**OBSERVACIÓN.** La pregunta natural es si el teorema es también cierto para las  $\alpha$ -capacidades de Riesz, esto es: ¿Es cierto que  $\text{cap}_\alpha(f^{-1}(E)) \geq \text{cap}_\alpha(E)$  para todos los borelianos de  $\Delta$ ? Esto no he podido dilucidarlo.

Una conocida consecuencia del teorema de Frostman (Teorema E) (ver, por ejemplo, [K, p. 119]) es el hecho de que los productos de Blaschke son densos en el espacio de las funciones internas en la topología de la convergencia uniforme sobre compactos. Sin embargo, para probar el Teorema 8, necesitaremos una versión más fuerte de este resultado.

**Lema 5.3** Sea  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  una función interna con  $\text{ord}(f, 0) = k \geq 1$ , es decir,

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(k-1)}(0) = 0, \quad f^{(k)}(0) \neq 0, \quad (k \geq 1).$$

Entonces, existe una sucesión  $\{B_N\}_{N=1}^\infty$  de productos de Blaschke finitos, tal que

- i)  $B_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f$ , uniformemente sobre compactos.
- ii)  $\text{ord}(B_N, 0) = k$ , para todo  $N$ .

DEMOSTRACIÓN. Observemos en primer lugar que si  $f$  es un producto de Blaschke infinito,

$$f(z) = \lambda z^k \prod_{j=1}^{\infty} e^{i\nu_j} \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}, \quad |\lambda| = 1,$$

esto es claro, pues basta tomar

$$B_N(z) = \lambda z^k \prod_{j=1}^N e^{i\nu_j} \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}.$$

En el caso general, pongamos  $f = z^k g$  con  $g$  interna y  $g(0) \neq 0$ . Por el teorema de Frostman, existe una sucesión  $\{g_n\}$  de productos de Blaschke infinitos tales que  $B_n \rightarrow g$  uniformemente sobre compactos. En particular,  $g_n(0) \rightarrow g(0)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , así que podemos suponer que  $g_n(0) \neq 0$  para todo  $n$ . Ahora los productos de Blaschke  $B_n = z^k g_n$  convergen a  $f$  uniformemente sobre compactos, y cumplen que  $B_n^{(k)}(0) \neq 0$ , y  $B_n^{(j)}(0) = 0$  para  $j < k$ . ■

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 8. Veamos, en primer lugar, que usando el Lema 5.3 podemos reducir la demostración de (5.6) a probarla para productos de Blaschke finitos.

Es claro, por el teorema de capacitabilidad de Choquet, que basta probar (5.6) cuando  $E \subset \Delta$  es compacto. Por la continuidad de  $f$ ,  $f^{-1}(E)$  es cerrado en  $\Delta$  y, nuevamente por el teorema de capacitabilidad de Choquet,

$$(5.9) \quad \text{cap}_0(A) = \lim_{r \rightarrow 1} \text{cap}_0(A \cap \mathbb{D}_r),$$

para todo boreliano  $A$  de  $\Delta$ , donde  $\mathbb{D}_r = \{z \in \Delta : |z| \leq r\}$  ( $0 < r < 1$ ). Fijemos ahora un  $\varepsilon > 0$ . Por el Lema 5.3, podemos encontrar un  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que los productos de Blaschke finitos  $B_N(z)$  cumplen

$$|B_N(z) - f(z)| < \varepsilon, \quad \text{ord}(B_N, 0) = k,$$

para todo  $z \in \mathbb{D}_r$ , y todo  $N \geq N_0$ .

Sean ahora  $z_{1,N}, \dots, z_{m,N}$  los puntos de Fekete de orden  $m$  de  $B_N^{-1}(E) \cap \mathbb{D}_r$ , y pongamos

$$f(z_{j,N}) = \tilde{w}_{j,N} \in E_\varepsilon, \quad B_N(z_{j,N}) = w_{j,N} \in E,$$

donde  $E_\varepsilon = \{w \in \Delta : \text{dist}(w, E) < \varepsilon\}$ . Puesto que  $\{z_{j,N}\}_{j=1}^m$  es una colección de  $m$  puntos en  $f^{-1}(E_\varepsilon) \cap \mathbb{D}_r$ , tenemos para los  $m$ -diámetros  $D_m$  que

$$\begin{aligned} D_m(B_N^{-1}(E) \cap \mathbb{D}_r) &= \left( \prod_{i \neq j} |z_{i,N} - z_{j,N}| \right)^{1/[m(m-1)]} \\ &\leq D_m(f^{-1}(E_\varepsilon) \cap \mathbb{D}_r), \end{aligned}$$

y haciendo  $m \rightarrow \infty$ , obtenemos que

$$(5.10) \quad \text{cap}_0(B_N^{-1}(E) \cap \mathbb{D}_r) \leq \text{cap}_0(f^{-1}(E_\varepsilon) \cap \mathbb{D}_r).$$

Observemos ahora que  $f^{-1}(E_\varepsilon) \cap \mathbb{D}_r$  es un abierto en  $\mathbb{D}_r$ , por lo que, de nuevo por el teorema de capacitabilidad de Choquet,

$$\text{cap}_0(f^{-1}(E) \cap \mathbb{D}_r) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{cap}_0(f^{-1}(E_\varepsilon) \cap \mathbb{D}_r).$$

Por tanto, haciendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , (5.10) nos da

$$\text{cap}_0(B_N^{-1}(E) \cap \mathbb{D}_r) \leq \text{cap}_0(f^{-1}(E) \cap \mathbb{D}_r),$$

lo que, haciendo  $r \rightarrow 1$ , nos dice, por (5.9), que basta probar (5.6) para el producto de Blaschke finito  $B_N$ .

Obsérvese que esta parte del argumento es válida para  $\alpha > 0$ , por lo que para probar un teorema de distorsión de subconjuntos del disco unidad para la  $\alpha$ -capacidad, basta hacerlo para productos de Blaschke finitos.

Sea, pues,  $f$  un producto de Blaschke finito.

$$f(z) = \lambda z^k \prod_{j=1}^N e^{i\nu_j} \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z},$$

y sea  $E \subseteq \bar{\Delta}$  compacto. Denotemos por  $g_E, g_F$  las funciones de Green de las componentes conexas no acotadas de  $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$  and  $\hat{\mathbb{C}} \setminus F$  (aquí  $F = f^{-1}(E)$ ) con polo en infinito. Observemos ahora que  $f : \bar{\Delta} \rightarrow \bar{\Delta}$  es continua, y, por tanto,  $F$  es también un compacto. Tenemos que

$$\begin{aligned} (5.11) \quad g_E(z) - \log |z| &= \log \frac{1}{\text{cap}_0(E)} + O(|z|^{-1}), \\ g_F(z) - \log |z| &= \log \frac{1}{\text{cap}_0(F)} + O(|z|^{-1}), \end{aligned}$$

cuando  $|z| \rightarrow \infty$ . Puesto que  $k \geq 1$ , se sigue que

$$(5.12) \quad g_E(f(z)) - k \log |z| - \log \prod_{j=1}^N \frac{1}{|a_j|} = \log \frac{1}{\text{cap}_0(E)} + O(|z|^{-1}),$$

cuando  $|z| \rightarrow \infty$ . Es fácil ver que

$$(5.13) \quad g_E(f(z)) - \sum_{j=1}^N g_F(z, \bar{a}_j^{-1})$$

es armónica en  $\mathbb{C} \setminus (F \cup (\cup_{j=1}^N \{\bar{a}_j^{-1}\}))$  y está acotada en los puntos  $\bar{a}_j^{-1}$  (aquí  $g_F(z, \bar{a}_j^{-1})$  denota la función de Green de  $\hat{\mathbb{C}} \setminus F$  con polo en  $\bar{a}_j^{-1}$ ). Por tanto, la función

$$(5.14) \quad G(z) = \frac{1}{k} g_E(f(z)) - g_F(z) - \frac{1}{k} \sum_{j=1}^N g_F(z, \bar{a}_j^{-1}),$$

en virtud de (5.11), (5.12) y (5.13), es armónica y acotada en  $\hat{\mathbb{C}} \setminus F$ . Puesto que  $G = 0$  sobre  $F$ , se sigue que  $G \equiv 0$ .

Por otro lado, usando la simetría de la función de Green,

$$g_F(z, \bar{a}_j^{-1}) = g_F(\bar{a}_j^{-1}, z) \longrightarrow g_F(\bar{a}_j^{-1}), \quad \text{cuando } |z| \rightarrow \infty,$$

y por tanto, por (5.14),

$$(5.15) \quad \log \frac{1}{\text{cap}_0(E)} - \log \prod_{j=1}^N |a_j| - k \log \frac{1}{\text{cap}_0(F)} - \sum_{j=1}^N g_F(\bar{a}_j^{-1}) = 0.$$

Ahora bien, puesto que  $F \subset \bar{\Delta}$ , el principio del máximo nos dice que

$$(5.16) \quad g_F(z) \geq g_{\bar{\Delta}}(z) = \log |z|, \quad |z| > 1.$$

Por tanto, de (5.15), obtenemos que

$$\log \frac{1}{\text{cap}_0(E)} - \log \prod_{j=1}^N |a_j| - k \log \frac{1}{\text{cap}_0(F)} \geq \sum_{j=1}^N \log |a_j|^{-1},$$

de donde se deduce (5.6).

Ahora, si hubiera igualdad en (5.6) para  $E \subseteq \bar{\Delta}$  compacto, de (5.15) se seguiría que

$$(5.17) \quad \sum_{j=1}^N (g_F(\bar{a}_j^{-1}) - \log |\bar{a}_j^{-1}|) = 0.$$

Pero, como por (5.16) cada sumando en (5.17) es positivo, esto obliga a que

$$g_F(\bar{a}_j^{-1}) = \log |\bar{a}_j^{-1}|, \quad j = 1, \dots, N.$$

Por el principio del máximo, forzosamente,  $g_F(z) = \log |z|$  ( $|z| \geq 1$ ), a no ser que no haya tales  $a_j$ , es decir, a no ser que  $f(z) = \lambda z^k$ . Esto significa que, si  $f$  no es una rotación de  $z^k$ , la parte  $\partial F_\infty$  de  $\partial F$  que es frontera de la componente conexa no acotada de  $\mathbb{C} \setminus F$  coincide con  $\partial \Delta$ . Por tanto, del hecho que haya igualdad en (5.6), inferimos que

$$1 = \text{cap}_0(\partial \Delta) = \text{cap}_0(\partial F_\infty) = (\text{cap}_0(\partial E_\infty))^{1/k},$$

es decir,  $\text{cap}_0(E) = \text{cap}_0(\partial E_\infty) = 1 = \text{cap}_0(\bar{\Delta})$ .

Finalmente, obsérvese que si  $f(z) = z^k$ , entonces (5.15) se escribe

$$\log \frac{1}{\text{cap}_0(E)} = k \log \frac{1}{\text{cap}_0(F)},$$

esto es, igualdad en (5.6), para cualquier cerrado  $E \subset \Delta$ . Esto prueba que (5.6) no se puede mejorar. ■

OBSERVACIONES.

1) Si  $f$  es un producto de Blaschke finito, (5.6) prueba la desigualdad (4.12) del Teorema 6.

2) Si  $k > 1$ , como  $\text{ord}(f^n, 0) = k^n$ , tenemos que si  $\text{cap}_0(E) > 0$ ,

$$\text{cap}_0(f^{-n}(E)) \geq (\text{cap}_0(E))^{1/k^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 = \text{cap}_0(\partial \Delta) = \text{cap}_0(\Delta).$$

Por tanto

**Corolario.** Si  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  es interna,  $f(0) = 0$ ,  $\text{ord}(f, 0) = k > 1$ , es decir,  $f'(0) = 0$ , y  $E \subseteq \Delta$  es un boreliano con  $\text{cap}_0(E) > 0$ , entonces

$$\text{cap}_0(f^{-n}(E)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{cap}_0(\Delta),$$

donde  $f^n$  denota la  $n$ -ésima iterada de  $f$ ,  $f^{-n} = (f^n)^{-1}$ .

## Capítulo 6

### Aplicaciones al estudio del comportamiento radial de funciones holomorfas

La primera aplicación trata de singularidades de funciones internas. Recordemos que  $e^{i\theta}$  no es un punto singular de  $f$  si existe un arco que contiene a  $e^{i\theta}$  a través del cual  $f$  puede prolongarse analíticamente. Denotaremos por  $S(f)$  el conjunto de puntos singulares de la función interna  $f$ .

En [F], J. L. Fernández probó que si  $f$  es interna y omite, al menos, dos puntos entonces el conjunto singular  $S(f)$  es grande. Concretamente

**Teorema F ([F]).** *Sea  $f$  una función interna y supongamos que  $f$  omite dos puntos  $a, b \in \Delta$  con  $\rho(a, b) \leq \varepsilon$ . Si  $I$  es un intervalo abierto,  $I \subseteq \partial\Delta$ , entonces o bien  $S(f) \cap I = \emptyset$ , o bien*

$$\text{Dim}(S(f) \cap I) \geq \alpha(\varepsilon),$$

donde  $\alpha$  es una función continua y monótona decreciente en  $[0, +\infty)$  con  $\alpha(x) > 1/2$ ,  $\alpha(0) = 1$ , y  $\rho$  es la distancia hiperbólica en  $\Delta$ .

En particular, si  $E$  es el conjunto en  $\Delta$  que  $f$  omite y  $E \neq \emptyset$ , entonces

$$\text{Dim}(S(f)) \geq \alpha(\rho_E),$$

donde,

$$\rho_E = \inf \{ \rho(a, b) : a, b \in E, a \neq b \},$$

La siguiente es una extensión del Teorema F, debida a K. Stephenson, que usaremos en la prueba del Teorema 10.

**Teorema G** ([S2]). *Sea  $f$  una función interna y supongamos que  $a, b$  están en el rango finito de  $f$  (es decir,  $a$  y  $b$  son valores que se toman sólo un número finito de veces), y que  $\rho(a, b) \leq \varepsilon$ . Si  $I$  es un intervalo abierto,  $I \subseteq \partial\Delta$ , entonces, o bien  $S(f) \cap I = \emptyset$ , o bien*

$$\text{Dim}(S(f) \cap I) \geq \alpha(\varepsilon).$$

*En particular ( $I = \partial\Delta$ ), si  $E$  es el rango finito de  $f$  y  $E$  contiene al menos dos puntos, entonces o bien  $S(f) = \emptyset$  (cosa que sólo puede ocurrir si  $f$  es un producto de Blaschke finito), o bien*

$$\text{Dim}(S(f)) \geq \alpha(\rho_E).$$

El Teorema 2 nos da una nueva estimación del tamaño del conjunto singular.

**Proposición 6.1.** *Sea  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  una función interna, y sea  $E$  el conjunto de puntos en  $\Delta$  que  $f$  omite ( $E \neq \emptyset$ ). Si  $B$  es el conjunto de puntos de acumulación de  $E$  en  $\partial\Delta$ , entonces*

$$\text{Dim}(S(f)) \geq \text{Dim}(B),$$

*y, por tanto, si  $E$  contiene al menos dos puntos,*

$$\text{Dim}(S(f)) \geq \max\{\alpha(\rho_E), \text{Dim}(B)\}.$$

**DEMOSTRACIÓN.** Veamos que  $\partial\Delta \setminus S(f) \subseteq f^{-1}(\partial\Delta \setminus B)$ . En efecto, si  $a \in \partial\Delta \setminus S(f)$ , entonces  $f$  es analítica en un entorno  $U_a$  de  $a$ , por lo que si  $z \in U_a \cap \Delta$  entonces  $|f(z)| < 1$ , si  $z \in U_a \cap \partial\Delta$  entonces  $|f(z)| = 1$ , y si  $z \in U_a \setminus \overline{\Delta}$  entonces  $|f(z)| > 1$ . Por el teorema de la aplicación abierta,  $f(U_a)$  es un entorno de  $f(a)$  y  $E \cap f(U_a \cap \Delta) = \emptyset$ . Por tanto  $f(a) \notin B$ .

Se sigue que  $f^{-1}(B) \subseteq S(f)$ , de donde

$$\text{Dim}(S(f)) \geq \text{Dim}(f^{-1}(B)) \geq \text{Dim}(B). \quad \blacksquare$$

Obsérvese que, en particular, si  $E$  se acumula en  $\Delta$ , entonces el conjunto de singularidades tiene dimensión uno, pues  $\alpha(0) = 1$ .

**Corolario 6.1.** *Sea  $E$  un cerrado relativo en  $\Delta$  de capacidad logarítmica cero y sea  $B = E' \cap \partial\Delta$  el conjunto de puntos de acumulación de  $E$  en  $\partial\Delta$ . Si  $F$  es una aplicación de recubrimiento universal de  $\Delta \setminus E$  y  $\Lambda(\Gamma)$  es el conjunto límite del grupo de recubrimiento  $\Gamma$  asociado a  $F$ , entonces*

$$\text{Dim}(\Lambda(\Gamma)) \geq \max\{\text{Dim}(B), \alpha(\rho_E)\}.$$

En particular, si  $E$  se acumula en  $\Delta$ , entonces  $\text{Dim}(\Lambda(\Gamma)) = 1$ .

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer que  $F(0) = 0$ . Puesto que  $\text{cap}_0(E) = 0$ ,  $F$  es interna [CL, p. 37]. El conjunto límite  $\Lambda(\Gamma)$  es el conjunto derivado de la órbita del cero  $F^{-1}(0)$ , de donde  $\Lambda(\Gamma) \subseteq S(F)$ . Ahora bien, para un producto de Blaschke infinito es claro que su conjunto singular coincide con el conjunto derivado de sus ceros. Por el teorema de Frostman, se sigue que  $S(F) = \Lambda(\Gamma)$ . El corolario es, pues, una consecuencia de la Proposición 6.1. ■

En lo que sigue, si  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa, denotaremos por  $Mf$  la función maximal radial, esto es,

$$Mf(e^{i\theta}) = \sup_{0 < r < 1} |f(re^{i\theta})|.$$

Obsérvese que  $\{f(re^{i\theta}) : 0 \leq r < 1\}$  es una curva en el dominio imagen  $\Omega = \mathbb{C} \setminus E$ , donde  $E$  es el conjunto que  $f$  omite. Estamos interesados en conocer el tamaño del conjunto de direcciones  $e^{i\theta}$  en que tal curva permanece a distancia acotada (desde  $f(0)$ ) en cualquier métrica completa en  $\Omega$ . Lo que vamos a ver es que la geometría de  $\Omega$  determina el comportamiento frontera de  $f$ . Ejemplos de resultados de este tipo son

a) Teorema de Fatou: Si  $\Omega \subseteq \Delta_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ , i.e.  $f$  está acotada, entonces  $f$  tiene valores radiales frontera en casi todo punto.

b) Si  $\Omega$  está contenido en un semiplano, entonces  $f \in H^{1, \text{weak}}(\Delta)$ . Más aún,

c) Si  $\Omega$  está contenido en un ángulo  $\{z : |\text{Arg } z| < \alpha\}$ , entonces  $f \in H^{p, \text{weak}}(\Delta)$ , con  $p = p(\alpha)$ .

En lo que sigue, veremos cómo obtener información acerca del comportamiento radial de  $f$ , en concreto del tamaño de  $\{\theta : Mf(e^{i\theta}) < \infty\}$ , a partir de propiedades del conjunto omitido  $E$ . En este sentido hay que señalar los siguientes resultados clásicos de Frostman [G, p. 70] (ya enunciado de otra forma) y Nevanlinna [N, p. 180].

**Teorema H.** Si  $f$  es holomorfa de  $\Delta$  en  $\Delta_R$ ,  $0 < R \leq \infty$ , y  $f$  omite un conjunto de capacidad logarítmica positiva, entonces:

i) (Frostman) Si  $R < \infty$ ,  $f$  no es interna, y por tanto,

$$|\{\theta : Mf(e^{i\theta}) < R\}| > 0.$$

ii) (Nevanlinna) Si  $R = \infty$ , entonces

$$|\{\theta : Mf(e^{i\theta}) < \infty\}| = 1.$$

donde  $|\cdot|$  denota medida de Lebesgue normalizada.



Así, si  $\text{cap}_0(\partial\Omega) > 0$ , la respuesta ya es conocida. Por otro lado, si  $E$  contiene al menos dos puntos, y  $F : \Delta \longrightarrow \Omega = \mathbb{C} \setminus E$  es una aplicación de recubrimiento universal y  $\text{cap}_0(E) = 0$ , entonces por un teorema de Myrberg,  $\Omega$  no tiene función de Green [Ni, p. 94] y el grupo de cubrimiento de  $\Omega$  diverge en el exponente 1 [T, p. 522]. Por un teorema de Sullivan [Ni, p. 107]), esto significa que el conjunto límite cónico  $C(\Gamma)$  tiene medida de Lebesgue 1. Ahora bien, si en  $e^{i\theta}$  existe el límite radial y  $MF(e^{i\theta}) < \infty$ , la geodésica (hiperbólica)  $\{F(re^{i\theta})\}_{0 \leq r < 1}$  debe acabar en  $\partial\Omega$ , y por tanto,  $e^{i\theta}$  no puede ser un punto límite cónico. Se sigue por el teorema de Plessner [P1] que, si  $\text{cap}_0(E) = 0$ , entonces

$$|\{\theta : MF(e^{i\theta}) < \infty\}| = 0$$

para el cubrimiento universal  $F : \Delta \longrightarrow \Omega$ . Así pues,  $F$  está radialmente acotada sólo en un conjunto de medida de Lebesgue nula, pero ¿aún así, como cuanto de grande es este conjunto?

Para tener una pista de cuál es el resultado correcto, consideremos la función modular que cubre el plano complejo  $\mathbb{C}$  y tiene dos puntos de ramificación que podemos suponer son 0 y 1. Tal función es la proyección

$$\pi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}/\Gamma,$$

donde  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$  y  $\Gamma$  es el grupo modular

$$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\},$$

que está generado por las transformaciones  $z \mapsto \gamma_1(z) = z + 1$ ,  $z \mapsto \gamma_2(z) = -1/z$ .

Evidentemente, las geodésicas  $g = \{\pi(x + iy)\}_{y>0}$  (los "rayos verticales" juegan en  $\mathbb{H}$  el papel de los radios en  $\Delta$ ) tales que  $M\pi(x) < \infty$  son aquellas que sólo penetran en la cúspide en  $\infty$  hasta una determinada altura máxima (que depende de la geodésica). La región de la cúspide no penetrada por  $g$  se representa en  $\mathbb{H}$ , salvo conjugación, por el semiplano  $\{z : \text{Im } z > 1\}$  y por sus imágenes mediante los elementos de  $\Gamma$  distintos de  $\gamma_1^n$ . Es fácil ver que tales imágenes son horoesferas tangentes a  $\mathbb{R}$ . Concretamente, si  $\gamma(z) = (az + b)/(cz + d)$ , entonces  $\gamma\{z : \text{Im } z > 1\}$  es la horoesfera tangente a  $\mathbb{R}$  en el racional  $a/c$  y de radio  $1/|c|^2$ .

Es, por tanto, claro que la cúspide en  $\infty$  se corresponde vía la función modular con  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  y que el hecho de que una geodésica  $g = \{\pi(x + iy)\}_{y>0}$  esté acotada, equivale a que el punto extremo  $x \in \mathbb{R}$  del rayo vertical  $\{x + iy\}_{y>0}$  esté "lejos" de todos los números racionales. Concretamente, debe ser,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c(x)}{q^2}, \quad \text{para todo } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \quad m.c.d.(p, q) = 1.$$

Ahora bien, es un resultado clásico de Jarník [J], que

$$\text{Dim} \left\{ \xi \in \mathbb{R} : \left| \xi - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c(\xi)}{q^2}, \text{ para todo } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \quad m.c.d.(p, q) = 1 \right\} = 1,$$

y, puesto que por lo anterior, tales  $\xi$  están en correspondencia biunívoca con las geodésicas acotadas de  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ , deducimos que para el cubrimiento universal

$$F: \Delta \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\},$$

se tiene que

$$(6.1) \quad \text{Dim}\{\theta: MF(e^{i\theta}) < \infty\} = 1.$$

De hecho, (6.1) puede probarse de forma similar en el caso de que el conjunto omitido  $E$  sea finito, usando la extensión del teorema de Jarník debida a S. J. Patterson [Pa].

Esto sugiere el siguiente

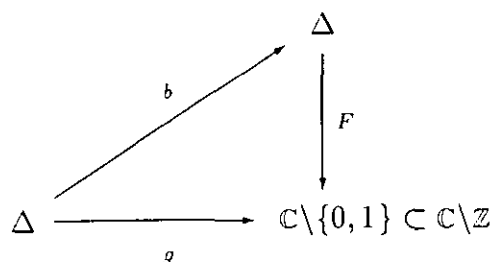
**Teorema 9** ([FP]). *Si  $f: \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa y omite (al menos) dos puntos, entonces*

$$\text{Dim}\{\theta: Mf(e^{i\theta}) < \infty\} = 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer, por composición con una transformación de Möbius adecuada, que  $f$  omite 0, 1. Sea  $g$  una rama de  $\frac{1}{2\pi i} \log f$ . Esto es,  $f = e^{2\pi i g}$ . Entonces  $|\log |f|| \leq 2\pi |g|$ , de donde,

$$\{\theta: Mg(e^{i\theta}) < \infty\} \subseteq \{\theta: Mf(e^{i\theta}) < \infty\},$$

por lo que basta probar el teorema para  $g$ . Ahora bien,  $g$  omite  $\mathbb{Z}$ , y  $g = F \circ b$ , donde  $F$  es el cubrimiento universal de  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  y  $b: \Delta \longrightarrow \Delta$  omite  $F^{-1}(\mathbb{Z})$ .



Si  $b$  no fuera interna no habría nada que probar pues, entonces,  $g$  estaría radialmente acotada no sólo en un conjunto de dimensión uno, sino de medida de Lebesgue positiva.

Por tanto, podemos suponer que  $b$  es interna, y en este caso, basta con que probemos que

$$(6.2) \quad \text{Dim}\{\theta: Mb(e^{i\theta}) < 1\} = 1.$$

Pero, puesto que  $b$  omite  $F^{-1}(\mathbb{Z})$ , y

$$\begin{aligned} \rho_{F^{-1}(\mathbb{Z})} &\stackrel{\text{def}}{=} \inf\{\rho_{\Delta}(a, b): a, b \in F^{-1}(\mathbb{Z}), a \neq b\} \\ &= \inf\{\rho_{\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}}(k, k+1): k \in \mathbb{Z}\} = 0, \end{aligned}$$

pues si  $k \geq 2$  (ver, por ejemplo, [A2, p. 17])

$$\rho_{\mathbb{C} \setminus \{0,1\}}(k, k+1) \leq C \int_k^{k+1} \frac{dx}{x \log x} = C \log \frac{\log(k+1)}{\log k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Por tanto (6.2) se sigue de

**Teorema 10** ([FP]) *Sea  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  interna y denotemos por  $E$  el conjunto en  $\Delta$  que  $f$  omite. Entonces, si  $E$  contiene al menos dos puntos,*

$$\text{Dim}\{\theta : Mf(e^{i\theta}) < 1\} \geq \alpha(\rho_E).$$

*Si  $f$  no es un producto de Blaschke finito, entonces la misma conclusión es válida si  $E$  denota el rango finito de  $f$ .*

Un valor  $a$  es del rango finito de  $f$  si, a lo sumo, se toma un número finito de veces. En particular, todo valor omitido, es del rango finito.

OBSERVACIONES.

a) Observemos que, en particular,  $\text{Dim}\{\theta : Mf(e^{i\theta}) < 1\} > 1/2$ , y tiene dimensión uno si  $E$  se acumula en  $\Delta$ .

b) El Teorema 10, puede considerarse una extensión del teorema de Frostman (ver el Teorema H).

**DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 10.** Sean  $a, b$  en el rango finito de  $f$ , y sea  $r \in (0, 1)$  tal que  $E \cap \{|z| = r\} = \emptyset$ , y  $\max\{|a|, |b|, |f(0)|\} < r$ . Tal  $r$  existe, puesto que, por el teorema de Frostman,  $\text{cap}_0(E) = 0$ . Sea  $\Omega_r$  la componente conexa de  $f^{-1}(\Delta_r)$  que contiene al cero, donde  $\Delta_r = \{|w| < r\}$ . Por el principio del máximo y por conexión,  $\Omega_r$  es simplemente conexa. Sea  $\varphi_r : \Delta \rightarrow \Omega_r$  una aplicación de Riemann para  $\Omega_r$  elegida de forma que  $\varphi_r(0) = 0$ . Entonces  $h = \frac{1}{r}(f \circ \varphi_r)$  es interna.

En efecto,  $h \in H^\infty$ , y por el teorema de Fatou,  $h$  tiene valores radiales frontera en casi todo punto. Por otro lado, si denotamos por  $A_r = \partial\Omega_r \cap \partial\Delta$  y por  $B_r = \{e^{i\nu} : \exists \lim_{r \rightarrow 1} \varphi_r(se^{i\nu}) \in A_r\}$ , podemos escribir  $\partial\Delta = B_r \cup N \cup H$ , donde  $\text{cap}_0(N) = 0$ , y  $H$  es un conjunto abierto a través del cual  $\varphi_r$  se extiende analíticamente y  $\varphi_r(H) \subseteq \partial\Omega_r \cap \Delta$ .

Por los teoremas de McMillan [P1, p. 326] y de unicidad de Privalov,  $\varphi_r$  tiene derivada angular finita y no nula en casi todo punto de  $B_r$ , y, por tanto, en los correspondientes puntos de  $A_r$ ,  $f$  tiene valores radiales frontera de módulo menor o igual que  $r < 1$ . Como  $f$  es interna, se sigue que  $|A_r| = 0$ , y por el lema de Löwner para funciones univalentes, que  $|B_r| = 0$ , de donde  $|H| = 1$ , es decir,  $h$  es interna. Obsérvese que  $a/r$  y  $b/r$  están en el rango finito de  $h$ .

Además, es claro que

$$(6.3) \quad S(h) \subseteq B_r \cup N.$$

Por otro lado,

$$(6.4) \quad A_r \subseteq \{\theta : \sup_{0 < s < 1} |f(se^{i\theta})| < 1\}.$$

Esto es así porque si  $e^{i\theta} \in A_r$ , entonces existe una curva  $\gamma \subset \Omega_r$  que termina en  $e^{i\theta}$  y empieza en cero, y puesto que  $|f| \leq r$  sobre  $\gamma$ , y  $|f| < 1$  siempre, una aplicación del teorema de Lindelöf nos dice que sobre el radio,

$$\sup_{0 < s < 1} |f(se^{i\theta})| \leq \sqrt{r} < 1.$$

El teorema es ahora una consecuencia de (6.3) y (6.4). En efecto, si el teorema fuera falso, por la continuidad de la función  $\alpha$ , podríamos elegir  $r$  suficientemente cercano a 1 y un número  $\beta$  tales que

$$\text{Dim}\{\theta : Mf(e^{i\theta}) < 1\} < \beta < \alpha\left(\rho\left(\frac{a}{r}, \frac{b}{r}\right)\right).$$

Como las dimensiones de Hausdorff y capacitaria coinciden

$$\text{cap}_\beta(\{\theta : Mf(e^{i\theta}) < 1\}) = 0.$$

Por (6.4), tendríamos que entonces,  $\text{cap}_\beta(A_r) = 0$ , con lo que, por (6.3) y puesto que  $\text{cap}_\beta(N) = 0$ ,

$$\text{cap}_\beta(S(h)) \leq \text{cap}_\beta(B_r) \leq \sqrt{|\varphi'_r(0)|}^\beta \text{cap}_\beta(A_r) = 0,$$

en virtud del Teorema C. Por tanto,

$$\text{Dim}(S(h)) \leq \beta < \alpha\left(\rho\left(\frac{a}{r}, \frac{b}{r}\right)\right),$$

lo que contradice la extensión de K. Stephenson (Teorema G) del teorema de J. L. Fernández [F] (Teorema F), porque  $a/r$  y  $b/r$  están en el rango finito de  $h$ , y por tanto

$$\text{Dim}(S(h)) \geq \alpha\left(\rho\left(\frac{a}{r}, \frac{b}{r}\right)\right).$$

Obsérvese que si  $f$  es un producto de Blaschke finito, entonces  $S(f) = \emptyset$ , por lo que  $S(h) \subseteq N$  y no se llega a contradicción en el argumento anterior.

En el caso en que  $E$  es el conjunto de valores omitidos por  $f$ , la prueba es similar pero al final se usa directamente el Teorema F.

#### COMENTARIOS ADICIONALES AL TEOREMA 9.

1) Ya comentamos que el Teorema 9 es consecuencia de la extensión de S. J. Patterson del teorema de Jarník cuando el conjunto omitido  $E$  es finito y  $f$  es el

cubrimiento universal de  $\Omega = \mathbb{C} \setminus E$ . Sin embargo, el Teorema 9 no implica el teorema de Patterson, ni siquiera para dominios planos, pues este último nos dice que el conjunto de geodésicas acotadas en  $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_N\}$ , i.e. que penetran una distancia acotada en cualquiera de las  $N+1$  cúspides  $z_1, \dots, z_N, \infty$  tiene dimensión 1, y la prueba del Teorema 9 se puede adaptar solamente para obtener un resultado sobre geodésicas que penetran una distancia acotada en todas las cúspides menos una. Para verlo basta sustituir la función  $g$  que aparece en la prueba del Teorema 9, por una rama de  $\frac{1}{2\pi i} \log(f \circ P)$ , donde  $P$  es un polinomio que se anula, por ejemplo, en  $z_1, \dots, z_{N-1}$  y toma el valor 1 en  $z_N$ . Esta dificultad será resuelta totalmente por el Teorema 12, que incluye, en particular, al Teorema 9 y al teorema de Patterson.

2) En general, esto es, sin hipótesis sobre valores omitidos, no pueden obtenerse resultados de acotación radial, como muestran los siguientes ejemplos:

2.a) Si  $f$  no omite ningún valor, entonces puede darse que a lo largo de todo radio,  $f$  no esté radialmente acotada.

En efecto, denotemos por  $\Delta_n = \{z \in \Delta : |z| < 1 - 2^{-n}\}$  y por  $L_n$  un arco de circunferencia en  $\Delta_{n+1} - \Delta_n$ . Sea  $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de reales positivos,  $M_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por el teorema de Runge, para cada  $j$  podemos encontrar un polinomio  $P_j$  tal que  $|P_j| < 2^{-j}$  en  $\Delta_j$ , y  $|P_j| \sim M_j$  en  $L_j$ . Si  $z \in \Delta$ , entonces  $z \in \Delta_n$  para algún  $n = n(z)$  con lo que

$$\sum_{n(z)}^{\infty} |P_n(z)| < \sum_{n(z)}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

Por tanto, la serie  $\sum_{j=1}^{\infty} P_n(z)$  converge a una función  $f(z)$  holomorfa en  $\Delta$ . Obsérvese que si se eligen los arcos  $L_n$  de forma que cualquier radio corte forzosamente a infinitos arcos  $L_n$ 's, y los números  $M_n$  con un crecimiento muy rápido, por ejemplo  $M_n \sim 2^n$ , se sigue que  $Mf(e^{i\theta}) = +\infty$  para todo  $\theta$ .

2.b) A la misma conclusión se llega tomando una serie lacunar  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k z^{n_k}$  tal que  $\lambda_k$  y  $n_k$  crezcan muy rápidamente. Por ejemplo,  $\lambda_k = 5^k$ ,  $n_{k+1} > 2kn_k$ .

2.c) Sea  $f$  la función del ejemplo 2.b). La función  $g = e^f$  omite el cero y a lo largo de todo radio no está no acotada.

Por tanto, existen funciones holomorfas omitiendo exactamente un punto y que a lo largo de todo radio no están acotadas.

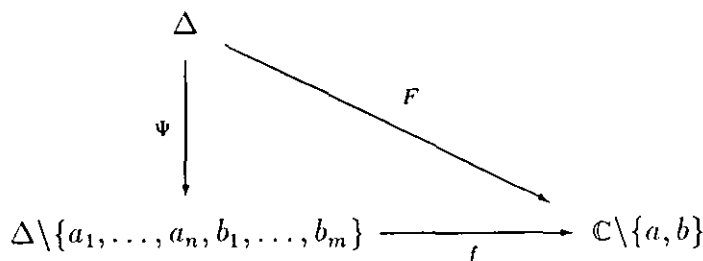
Veamos ahora que el Teorema 9 puede mejorarse, esto es, podemos obtener la misma conclusión aunque  $f$  no omita dos puntos. Basta con que los asuma sólo un número finito de veces.

**Teorema 11.** Si  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa y su rango finito contiene, al menos, dos puntos, entonces

$$\text{Dim}\{\theta : Mf(e^{i\theta}) < \infty\} = 1.$$

Equivalentemente, si  $\{\theta : MF(e^{i\theta}) < \infty\}$  no tiene dimensión plena, entonces  $f$  asume todos los valores infinitas veces con, a lo más, una excepción.

DEMOSTRACIÓN. Sean  $a, b$  ( $a \neq b$ ) en el rango finito de  $f$ . Sean  $a_1, \dots, a_n$  y  $b_1, \dots, b_m$ , respectivamente, las antiimágenes de  $a$  y  $b$  por  $f$ . Sea  $\Psi$  el cubrimiento universal de  $\Delta \setminus \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m\}$  elegido de forma que  $\Psi(0) = 0$  (podemos suponer que  $f(0) \neq a, b$ ). Llamemos  $F = f \circ \Psi$ .



Por un lado,  $\Psi$  es interna, pues omite un conjunto de capacidad logarítmica nula. Por otro,  $F$  omite  $a, b, \infty$  y por tanto es normal, esto es, Lipschitz cuando en  $\Delta$  consideramos la métrica de Poincaré y en  $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ , como subconjunto de  $\hat{\mathbb{C}}$ , la métrica esférica.

Ahora bien, como  $F$  omite dos puntos, el Teorema 9 nos dice que

$$(6.5) \quad \dim\{\theta : MF(e^{i\theta}) < \infty\} = 1.$$

Sea  $G$  el grupo de cubrimiento de  $\Delta \setminus \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m\}$  asociado a  $\Psi$ , y sea  $\Lambda$  su conjunto límite. Entonces, puesto que  $G$  es finitamente generado,

$$\dim(S(\Psi)) = \dim(\Lambda) = \delta(G),$$

donde  $\delta(G)$  es el exponente de convergencia de  $G$ . Por otro lado,  $\delta(G) < 1$  (ver, por ejemplo, [BM]). Se sigue que el conjunto de  $\theta$ 's en que  $\Psi$  no tiene límite radial de módulo 1, es de dimensión de Hausdorff menor que 1, y, desde luego, está contenido en  $\partial\Delta \setminus S(\Psi)$ . Por tanto, en vista de (6.5)

$$(6.5') \quad \dim\{\theta : \exists \lim_{r \rightarrow 1} \Psi(re^{i\theta}) \in \partial\Delta \setminus S(\Psi), MF(e^{i\theta}) < \infty\} = 1.$$

Sea  $\theta$  tal que  $MF(e^{i\theta}) < \infty$  y sea  $\varphi$  tal que  $\Psi(e^{i\theta}) = e^{i\varphi}$ . Denotemos por  $R_\varphi$  el radio en  $\Delta$  que termina en  $e^{i\varphi}$ . Observemos que  $\Psi$  es conforme en  $\partial\Delta \setminus S(\Psi)$ , ya que si

$$\Psi(z) = e^{i\varphi} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{|a_j|}{a_j} \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z} \exp\left(-\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\nu(\theta)\right), \quad z \in \Delta,$$

entonces [AC], se tiene para la derivada angular de  $\Psi$  que

$$|\Psi'(\xi)| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 - |a_j|^2}{|\xi - a_j|^2} + 2 \int_{\partial\Delta} \frac{d\nu(t)}{|\xi - t|^2}, \quad \xi \in \partial\Delta,$$

y como  $\Psi(0) = 0$ , se sigue que  $|\Psi'(\xi)| \geq 1$  en  $\partial\Delta$ . Puesto que la derivada angular coincide con la derivada usual en los puntos no singulares de  $\Psi$ , concluimos que  $\Psi$  es conforme en  $e^{i\theta}$ .

Por tanto el radio  $R_\varphi$  es la imagen por  $\Psi$  de una curva  $\gamma$  en  $\Delta$  que termina en  $e^{i\theta}$  y es perpendicular a  $\partial\Delta$  en  $e^{i\theta}$ . Veamos que  $F$  debe estar acotada a lo largo de  $\gamma$ . Recordemos que, por hipótesis, lo está a lo largo del radio  $R_\theta$  que termina en  $e^{i\theta}$ . Puesto que  $F$  es normal y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_\Delta(R_\theta, \gamma(t)) = 0,$$

se sigue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_{\hat{\mathbb{C}}}(\mathcal{R}, \Gamma(t)) = 0,$$

donde  $\mathcal{R}$  y  $\Gamma$  denotan, respectivamente, las imágenes de  $R_\theta$  y  $\gamma$  por  $F$ . Como  $MF(e^{i\theta}) < \infty$ ,  $\mathcal{R}$  está a distancia esférica positiva de  $\infty$  (el “polo norte” de  $\hat{\mathbb{C}}$ ). Así pues, lo mismo es válido para  $\Gamma$  puesto que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_{\hat{\mathbb{C}}}(\mathcal{R}, \Gamma(t)) = 0$ . Se sigue que  $f(R_\varphi)$  está acotada en  $\mathbb{C}$ , es decir,  $Mf(e^{i\varphi}) < \infty$ . Por tanto, (6.5') implica el teorema. ■

Puesto que una función meromorfa  $f : \Delta \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  no es más que una función holomorfa con valores en la esfera de Riemann, los Teoremas 9 y 11 podrían haberse enunciado para funciones meromorfas sin más que tener en cuenta que  $\infty$  es uno de los puntos omitidos. En este sentido, los teoremas anteriores nos hablan de curvas que “no se aproximan” al punto omitido en  $\infty$ . Ya hemos comentado que el Teorema 9 puede extenderse para obtener un teorema sobre curvas que no se aproximan a todas las cúspides (puntos omitidos aislados) menos una. El siguiente teorema resuelve totalmente el problema, pues nos permite olvidar todo tipo de hipótesis (topológicas o no) sobre  $\partial\Omega$ . Además es válido para cualquier superficie de Riemann que no sea el disco menos un punto.

**Teorema 12.** *Sea  $\mathcal{R}$  una superficie de Riemann hiperbólica distinta de  $\Delta \setminus \{0\}$ . Si  $f : \Delta \rightarrow \mathcal{R}$  es holomorfa, entonces*

$$\dim\{\theta : d(\theta) < +\infty\} \geq \delta(\mathcal{R}),$$

donde

$$d(\theta) = \sup_{0 \leq r < 1} \rho(f(re^{i\theta}), f(0)),$$

$\delta(\mathcal{R})$  es el exponente de convergencia del grupo de cubrimiento de  $\mathcal{R}$  y  $\rho$  denota distancia hiperbólica en  $\mathcal{R}$ .

Como ha hemos comentado, el teorema es exacto, pues para el cubrimiento universal de  $\mathcal{R}$ , se tiene la igualdad:

**Teorema I** (J. L. Fernández, M. Melián [FM]). *Sea  $\mathcal{R}$  una superficie de Riemann hiperbólica distinta de  $\Delta \setminus \{0\}$ , y sea  $p \in \mathcal{R}$ . Si  $\text{Acot}(\mathcal{R}, p)$  denota el conjunto de direcciones  $\theta \in [0, 2\pi)$ , en que la geodésica de  $\mathcal{R}$  que emana desde  $p$  en la dirección  $\theta$  permanece a distancia hiperbólica acotada de  $p$ , entonces*

$$\text{Dim}(\text{Acot}(\mathcal{R}, p)) = \delta(\mathcal{R}),$$

donde  $\delta(\mathcal{R})$  es el exponente de convergencia del grupo de cubrimiento de  $\mathcal{R}$ .

De hecho, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que

$$\text{Dim}(\text{Acot}(\mathcal{R}, p, N)) > \delta(\mathcal{R}) - \varepsilon,$$

donde  $\text{Acot}(\mathcal{R}, p, N)$  denota el conjunto de direcciones  $\theta \in [0, 2\pi)$  en que la geodésica  $\gamma_\theta$  que emana desde  $p$  en la dirección  $\theta$  verifica que

$$\rho(\gamma_\theta(t), p) \leq N, \quad \text{para todo } t > 0.$$

De hecho, este teorema sugiere el Teorema 12 de igual modo que el teorema de Jarník sugirió el Teorema 9 (el cubrimiento universal es el caso extremal).

#### OBSERVACIONES.

1) Observemos que si  $\mathcal{R} = \Delta \setminus \{0\}$  el Teorema 12 es falso, pues en este caso, si  $f$  es el cubrimiento universal de  $\Delta \setminus \{0\}$ ,  $\{\theta : d(\theta) < +\infty\} = \emptyset$ , y  $\delta(\Delta \setminus \{0\}) = 1/2$ .

2) En lo que se refiere a las superficies de Riemann excepcionales, dotadas de sus métricas de curvatura constante, el Teorema 13 es trivialmente válido para la esfera de Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$  y para los toros ya que éstas son superficies compactas. Es, sin embargo falso, para el plano complejo  $\mathbb{C}$  y el plano menos un punto,  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , -veáanse los comentarios al Teorema 9 (página 120)- ya que en estos dos casos puede ocurrir que, a lo largo de todo radio,  $f$  no esté acotada.

3) Para dominios planos, el Teorema 12, enunciado en forma alternativa, nos dice que

$$\text{Dim}\{\theta : D(\theta) > 0\} \geq \delta(\Omega),$$

donde

$$D(\theta) = \inf_{0 < r < 1} \text{dist}(f(re^{i\theta}), \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega)$$

y  $\text{dist}$  denota distancia en la métrica esférica.

Antes de pasar a la prueba del Teorema 12, necesitaremos algunas propiedades de la medida armónica.

Si  $I$  es un intervalo en  $\partial\Delta$  con  $|I| \leq \pi$ , y denotamos por  $\omega(z, I)$  la medida armónica de  $I$  respecto de  $z \in \Delta$ , esto es,

$$\omega(z, I) = \frac{1}{2\pi} \int_I \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{i\theta}|^2} d\theta,$$



entonces

$$B_I = \left\{ z \in \Delta : \omega(z, I) < \frac{1}{2} \right\}$$

es un "semiplano" hiperbólico en  $\Delta$ , limitado por  $\partial\Delta \setminus I$  y la geodésica (en  $\Delta$ )

$$g_I = \left\{ z \in \Delta : \omega(z, I) = \frac{1}{2} \right\}.$$

Si  $\varepsilon \in [1/2, 1)$ , entonces, por las propiedades de invariancia de la medida armónica, es fácil comprobar que

$$\begin{aligned} P &\stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \Delta : \omega(z, I) < \varepsilon\} \\ &= \left\{ z \in \Delta : \rho_\Delta(z, B_I) < \log \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \varepsilon \right) \right\}. \end{aligned}$$

Obsérvese que la curva

$$c = \{z \in \Delta : \omega(z, I) = \varepsilon\}$$

es una curva de nivel de la distancia a  $g_I$  (está a distancia constante,  $\log \operatorname{tg}(\pi\varepsilon/2)$ , de  $g_I$ ).

Diremos que un subdominio de  $\Delta$  es un *polígono casi geodésico* si está limitado, o bien por geodésicas en  $\Delta$ , o bien por curvas de nivel de la distancia a ciertas geodésicas en  $\Delta$ .

Observemos que, de acuerdo con esta definición,  $P$  es un polígono casi geodésico en  $\Delta$ .

**Lema 6.2.** Sea  $\mathcal{I} = \{I_j\}_{j=1}^\infty$  una colección numerable de intervalos en  $\partial\Delta$  con interiores disjuntos y tales que  $|I_j| < \pi$ , para todo  $j$ . Sea  $\mathcal{E} = \{\varepsilon_j\}_{j=1}^\infty$  una sucesión de números  $\varepsilon_j \in [1/2, 1)$ . Denotemos por  $\omega(z, I_k)$  la medida armónica de  $I_k$  respecto de  $z \in \Delta$ , y sea

$$\begin{aligned} P_k &= \{z \in \Delta : \omega(z, I_k) < \varepsilon_k\} \\ &= \left\{ z \in \Delta : \rho_\Delta(z, B_k) < \log \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \varepsilon_k \right) \right\}, \end{aligned}$$

donde  $B_k$  denota el semiplano hiperbólico

$$B_k = \left\{ z \in \Delta : \omega(z, I_k) < \frac{1}{2} \right\}.$$

Sea  $P$  el polígono casi geodésico,

$$P = P(\mathcal{I}, \mathcal{E}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} P_k.$$

Si  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  es una función holomorfa con  $f(0) = 0$ , y  $A$  es la componente conexa de  $f^{-1}(P)$  que contiene al cero, entonces:

a)  $A$  es simplemente conexa.

b) Si  $\gamma : [0, 1) \rightarrow \Delta$  es una curva contenida en  $A$ , que empieza en 0, y termina en un punto  $e^{i\theta} \in \partial A \cap \partial \Delta$ , entonces

$$f(re^{i\theta}) \in P(\mathcal{I}, \mathcal{E}'), \quad 0 \leq r < 1,$$

donde

$$\mathcal{E}' = \left\{ \frac{1 + \varepsilon_j}{2} \right\}_{j=1}^{\infty}.$$

DEMOSTRACIÓN. Si  $h$  es una función armónica en  $\Delta$ , entonces por el principio del máximo,  $\{z \in \Delta : h(z) < \varepsilon\}$  es simplemente conexo. Si  $\omega_k = \omega(\cdot, I_k)$ , entonces la función  $u_k = \omega_k \circ f$  es armónica en  $\Delta$ , y como

$$f^{-1}(P) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{z \in \Delta : u_k(z) < \varepsilon_k\}.$$

se sigue, por conexión, que  $A$  es simplemente conexa. Esto prueba a).

Para probar b) supongamos, por simplicidad, que  $e^{i\theta} = 1$ . Como  $f(\gamma) \subset P$ , tenemos que  $u_k(\gamma) < \varepsilon_k$ , y en cualquier caso, que  $u_k < 1$  en  $\Delta$ . Podemos suponer que  $\gamma$  no corta al radio  $\mathcal{R} = [0, 1)$  más que en sus extremos. puesto que, en caso contrario, bastaría repetir el argumento que sigue con cada arco de  $\gamma$  con extremos sobre dicho radio.

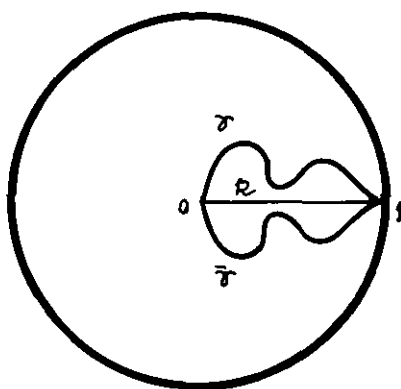


figura 2.

Denotemos como antes  $u_k = \omega_k \circ f = \omega(\cdot, I_k) \circ f$ . Sea  $u_k^*$  la función armónica en  $\Delta$  obtenida reflejando  $u_k$  en el diámetro  $[-1, 1]$ , esto es,  $u_k^*(z) = u_k(\bar{z})$ . Entonces  $u_k + u_k^*$  es armónica en  $\Delta$ , y

$$u_k + u_k^* < \varepsilon_k + 1, \quad \text{sobre } \gamma,$$

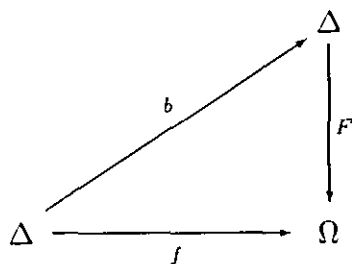
$$u_k + u_k^* < 1 + \varepsilon_k, \quad \text{sobre } \bar{\gamma}.$$

Aplicando el principio del máximo en el dominio que limitan  $\gamma$  y  $\bar{\gamma}$ , obtenemos que

$$u_k + u_k^* = 2u_k < 1 + \varepsilon_k, \quad \text{sobre } \mathcal{R} = [0, 1].$$

Por tanto,  $u_k < (1 + \varepsilon_k)/2$  sobre  $\mathcal{R}$ . Esto significa que  $f(\mathcal{R}) \subset P(\mathcal{I}, \mathcal{E}')$ . ■

**DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 12.** Sea  $f : \Delta \rightarrow \mathcal{R}$  una aplicación de recubrimiento universal elegida de forma que  $F(0) = f(0)$ , y sea  $b : \Delta \rightarrow \Delta$  una función holomorfa tal que  $f = F \circ b$ ,  $b(0) = 0$ .



Fijemos un número  $\varepsilon > 0$  pequeño, y sea  $N = N(\varepsilon)$  el número natural que nos asegura el Teorema I, es decir, tal que

$$\text{Dim}(\text{Acot}(\mathcal{R}, f(0), N)) > \delta(\mathcal{R}) - \varepsilon.$$

donde

$$\text{Acot}(\mathcal{R}, f(0), N) = \{\theta : \sup_{0 \leq r < 1} \rho(F(0), F(re^{i\theta})) \leq N\},$$

y  $\rho$  denota la distancia hiperbólica en  $\mathcal{R}$ .

Sea ahora  $E$  un subconjunto cerrado de  $\partial\Delta$  tal que

$$(6.17) \quad E \subseteq \text{Acot}(\mathcal{R}, f(0), N), \quad \text{Dim}(E) \geq \delta(\mathcal{R}) - \varepsilon.$$

Sea  $O = \partial\Delta \setminus E$ . Entonces,  $O = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ , donde los  $I_j$  son intervalos disjuntos en  $\partial\Delta$  con puntos extremos en  $E$ . Entonces,

**Lema 6.3.** Con las notaciones del Lema 6.2, existen dos constantes  $M(\varepsilon)$  y  $k_\varepsilon$  tales que si

$$z \in P_\varepsilon = P(\mathcal{I}, \mathcal{E}) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{z \in \Delta : \omega(z, I_j) < k_\varepsilon\},$$

entonces

$$\rho_{\Delta}(z, \text{rad}(E)) \leq M(\varepsilon).$$

donde  $\text{rad}(E) = \{re^{i\theta} \in \Delta : e^{i\theta} \in E\}$ , y

$$\mathcal{I} = \{I_j\}_{j=1}^{\infty}, \quad \mathcal{E} = \{\varepsilon_j\}_{j=1}^{\infty} \quad \text{con } \varepsilon_j = k_{\varepsilon}, \quad \text{para todo } j,$$

DEMOSTRACIÓN. Dado  $e^{i\theta} \in E$ , denotemos por  $C_{\varepsilon}(\theta) \subset \Delta$  el “cono” con vértice en  $e^{i\theta}$  definido por

$$C_{\varepsilon}(\theta) = \{z \in \Delta : \rho_{\Delta}(z, \{re^{i\theta}\}_{0 < r < 1}) \leq d_{\varepsilon}\}$$

donde  $d_{\varepsilon}$  está definido por el hecho de que  $\partial C_{\varepsilon}(\theta)$  hace un ángulo  $\varepsilon$  con  $\partial\Delta$  en  $e^{i\theta}$ .

Concretamente, se tiene [Be, p. 162] que

$$\sinh d_{\varepsilon} = \cotg \varepsilon.$$

Consideremos el dominio

$$D_{\varepsilon} = \bigcup_{e^{i\theta} \in E} C_{\varepsilon}(\theta).$$

Por su propia definición, es claro que

$$D_{\varepsilon} \subset \{z \in \Delta : \rho_{\Delta}(z, \text{rad}(E)) < d_{\varepsilon}\}.$$

Sea  $c_j(\varepsilon)$  el arco de círculo en  $\Delta$  que intersecta a  $\partial\Delta$  en los puntos extremos  $e^{i\theta_{1,j}}, e^{i\theta_{2,j}}$ , de  $I_j$  y que hace un ángulo  $\varepsilon$  con  $I_j \subset \partial\Delta$  en estos puntos. Puesto que  $c_j(\varepsilon)$  está a distancia hiperbólica constante de la geodésica en  $\Delta$  dada por  $\{z \in \Delta : \omega(z, I_j) = 1/2\}$ , es fácil ver, usando de nuevo las propiedades de invariancia de la medida armónica que

$$c_j(\varepsilon) = \{z \in \Delta : \omega(z, I_j) = k_{\varepsilon}\}.$$

donde  $k_{\varepsilon} \in (1/2, 1)$  (si  $0 < \varepsilon < \pi/2$ ) verifica que

$$\begin{aligned} \cotg \varepsilon &= \sinh(\rho_{\Delta}(c_j(\varepsilon), \{z \in \Delta : \omega(z, I_j) = 1/2\})) \\ &= \sinh\left(\log \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} k_{\varepsilon}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} k_{\varepsilon}\right) - \cotg\left(\frac{\pi}{2} k_{\varepsilon}\right)\right). \end{aligned}$$

Puesto que  $c_j(\varepsilon)$  forma un ángulo nulo con  $\partial C_{\varepsilon}(\theta_{1,j})$  y  $\partial C_{\varepsilon}(\theta_{2,j})$  en los puntos extremos  $e^{i\theta_{1,j}}$  y  $e^{i\theta_{2,j}}$  de  $I_j$ , existe una constante  $M'(\varepsilon)$  tal que, para todo  $z \in c_j(\varepsilon)$ ,  $\rho_{\Delta}(z, D_{\varepsilon}) \leq M'(\varepsilon)$ . Ahora, el lema se sigue de la desigualdad triangular. ■

Observemos que por (6.17) se sigue que  $P_{\varepsilon}$  tiene la siguiente propiedad:

Si  $\gamma : [0, 1) \rightarrow P_\varepsilon$  es una curva contenida en  $P_\varepsilon$  con  $\gamma(0) = 0$ , entonces  $F(\gamma)$  permanece en  $\mathcal{R}$  a distancia hiperbólica acotada (menor o igual que  $N(\varepsilon) + M(\varepsilon)$ ) de  $F(0) = f(0)$ .

Sea ahora  $A_\varepsilon$  la componente conexa de  $b^{-1}(P_\varepsilon)$  que contiene al cero. Por el Lema 6.2,  $A_\varepsilon$  es simplemente conexa, y  $P_\varepsilon$  trivialmente lo es. Sean  $\Phi_\varepsilon : \Delta \rightarrow A_\varepsilon$  y  $\Psi_\varepsilon : \Delta \rightarrow P_\varepsilon$  aplicaciones de Riemann elegidas de forma que  $\Phi_\varepsilon(0) = 0$  y  $\Psi_\varepsilon(0) = 0$ .

Observemos que  $\partial A_\varepsilon$  se compone, por el teorema de la función implícita, en una unión numerable de arcos de Jordan analíticos uniendo los puntos de ramificación ( $b' = 0$ ) de  $b$ . Si denotamos  $H_\varepsilon = \{e^{i\theta} : \exists \lim_{s \rightarrow 1} \Phi_\varepsilon(se^{i\theta}) \in \partial A_\varepsilon \cap \partial \Delta\}$ , podemos escribir  $\partial \Delta = H_\varepsilon \cup B_\varepsilon \cup N_\varepsilon$ , donde  $N_\varepsilon$  tiene capacidad logarítmica nula y  $B_\varepsilon$  es una unión de arcos abiertos a través de los cuales  $\Phi_\varepsilon$  se prolonga analíticamente y además  $\Phi_\varepsilon(B_\varepsilon) \subset \partial A_\varepsilon \cup \Delta$ .

Por otro lado,  $\partial P_\varepsilon$  es una curva de Jordan y, por tanto,  $\Psi_\varepsilon$  se extiende a un homeomorfismo  $\Phi_\varepsilon : \partial \Delta \rightarrow \partial P_\varepsilon$ .

Consideremos ahora la función holomorfa  $G_\varepsilon : \Delta \rightarrow \Delta$  dada por

$$G_\varepsilon = \Psi_\varepsilon^{-1} \circ b \circ \Phi_\varepsilon.$$

Observemos que  $G_\varepsilon(0) = 0$  y que, por el Teorema de Fatou,  $G_\varepsilon$  tiene límites radiales en casi todo punto respecto a la medida de Lebesgue.

$$\begin{array}{ccccc} A_\varepsilon \subset \Delta & \xrightarrow{b} & P_\varepsilon \subset \Delta & \xrightarrow{F} & \mathcal{R} \\ \uparrow \Phi_\varepsilon & & \uparrow \Psi_\varepsilon & & \\ \Delta & \xrightarrow{G_\varepsilon} & \Delta & & \end{array}$$

Para  $G_\varepsilon$  tenemos dos posibilidades:

a)  $G_\varepsilon$  no es interna. Entonces  $\{\theta : |G_\varepsilon(e^{i\theta})| < 1\}$  tiene medida de Lebesgue positiva. Si  $e^{i\theta}$  es tal que  $|G_\varepsilon(e^{i\theta})| < 1$ , entonces, puesto que  $\text{cap}_0(N_\varepsilon) = 0$ , podemos suponer que  $e^{i\theta} \in H_\varepsilon \cup B_\varepsilon$ . Si  $e^{i\theta}$  estuviera en  $B_\varepsilon$ , entonces tendríamos que  $\Phi_\varepsilon(e^{i\theta}) \in \partial A_\varepsilon \cap \Delta$ , de donde  $b(\Phi_\varepsilon(e^{i\theta})) \in \partial P_\varepsilon \cap \Delta$ , con lo que  $G_\varepsilon(e^{i\theta}) = \Psi_\varepsilon^{-1}(b(\Phi_\varepsilon(e^{i\theta}))) \in \partial \Delta$ , una contradicción. Por tanto,

$$\{\theta : |G_\varepsilon(e^{i\theta})| < 1\} \subset H_\varepsilon$$

salvo, a lo sumo, en un conjunto de capacidad logarítmica nula y, por tanto, de medida nula. Por tanto, usando el Lema de Löwner para funciones univalentes,

$$|\Phi_\varepsilon(H_\varepsilon)| \geq |H_\varepsilon| > 0.$$

Por otro lado, si  $e^{i\varphi} = \Phi_\varepsilon(e^{i\theta}) \in \Phi_\varepsilon(H_\varepsilon) \subset \partial A_\varepsilon \cap \partial \Delta$ , entonces la curva  $\{\Phi_\varepsilon(re^{i\theta})\}_{0 \leq r < 1}$  está contenida en  $A_\varepsilon$ , empieza en 0 y termina en  $e^{i\varphi}$ . El Lema 6.2 nos dice que

$$b(se^{i\varphi}) \in P(\mathcal{I}, \mathcal{E}'), \quad 0 \leq s < 1.$$

con

$$\mathcal{E}' = \left\{ \frac{1+k_\varepsilon}{2} \right\}_{j=1}^\infty.$$

Esto nos dice que

$$b(se^{i\theta}) \in \tilde{P}_\varepsilon = \left\{ z \in \Delta : \rho_\Delta(z, P_{\pi/2}) \leq \log \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} (1+k_\varepsilon) \right) \right\}, \quad 0 \leq s < 1,$$

y, por tanto,  $f(se^{i\varphi}) = F(b(se^{i\varphi}))$  está en  $\mathcal{R}$  a distancia hiperbólica acotada de  $F(0) = f(0)$ . Así pues

$$|\{\theta : d(\theta) < +\infty\}| \geq |\Phi_\varepsilon(H)| > 0,$$

con lo que

$$\operatorname{Dim}(\{\theta : d(\theta) < +\infty\}) = 1 \geq \delta(\mathcal{R}).$$

b)  $G_\varepsilon$  es interna. En este caso, usando el Teorema 2, vemos que

$$(6.18) \quad \operatorname{Dim}(G_\varepsilon^{-1}(\Psi_\varepsilon^{-1}(E))) \geq \operatorname{Dim}(\Psi_\varepsilon^{-1}(E)).$$

Si  $e^{i\theta} \in G_\varepsilon^{-1}(\Psi_\varepsilon^{-1}(E))$ , entonces  $\Psi_\varepsilon(G_\varepsilon(e^{i\theta})) \in E$ . Por otro lado, como  $\operatorname{cap}_0(N_\varepsilon) = 0$ , podemos suponer que  $e^{i\theta} \in G_\varepsilon^{-1}(\Psi_\varepsilon^{-1}(E)) \setminus N_\varepsilon$  (sin perder dimensión de Hausdorff), es decir que existe el límite radial  $\Phi_\varepsilon(e^{i\theta}) = e^{i\nu}$ . Si  $e^{i\nu} \in \partial A_\varepsilon \cap \Delta$ , entonces tendríamos que  $b(\Phi_\varepsilon(e^{i\theta})) = \Psi_\varepsilon(G_\varepsilon(e^{i\theta})) \in \Delta$ , una contradicción puesto que  $E \subset \partial \Delta$ .

Así pues,  $\Phi_\varepsilon(G_\varepsilon^{-1}(\Psi_\varepsilon^{-1}(E))) \subset \partial A_\varepsilon \cap \partial \Delta$  (salvo a lo sumo en un conjunto de capacidad logarítmica nula), y además, por el Teorema A y (6.18)

$$(6.19) \quad \operatorname{Dim}(\Phi_\varepsilon(G_\varepsilon^{-1}(\Psi_\varepsilon^{-1}(E)))) \geq \operatorname{Dim}(G_\varepsilon^{-1}(\Psi_\varepsilon^{-1}(E))) \geq \operatorname{Dim}(\Psi_\varepsilon^{-1}(E)).$$

Ahora bien, si  $e^{i\nu} = \Phi_\varepsilon(e^{i\theta}) \in \Phi_\varepsilon(G_\varepsilon^{-1}(\Psi_\varepsilon^{-1}(E)))$ , la curva  $\{\Phi_\varepsilon(re^{i\theta})\}_{0 \leq r < 1}$  está contenida en  $A_\varepsilon$ , empieza en 0 y termina en  $e^{i\nu}$ . Por tanto, el Lema 6.2 nos dice, como en el caso a), que

$$b(re^{i\theta}) \in \tilde{P}_\varepsilon = \left\{ z \in \Delta : \rho_\Delta(z, P_{\pi/2}) \leq \log \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} (1+k_\varepsilon) \right) \right\}, \quad 0 \leq r < 1,$$

lo que implica que  $d(\nu) < +\infty$ . Por tanto, por (6.19),

$$(6.20) \quad \operatorname{Dim}(\{\theta : d(\theta) < +\infty\}) \geq \operatorname{Dim}(\Phi_\varepsilon(G_\varepsilon^{-1}(\Psi_\varepsilon^{-1}(E)))) \geq \operatorname{Dim}(\Psi_\varepsilon^{-1}(E)).$$

Observemos que el Teorema A nos dice que

$$(6.21) \quad \dim(E) \geq \dim(\Psi_\varepsilon^{-1}(E))$$

y que esta desigualdad va en la dirección contraria a la que necesitaríamos para terminar. Por tanto, para obtener una estimación “opuesta” a (6.21) necesitamos un argumento adicional que pruebe que, de hecho,  $\dim(E)$  no es mucho más grande que  $\dim(\Psi_\varepsilon^{-1}(E))$ .

Una forma de proceder es como sigue.

**Lema 6.4.**  $\partial P_\varepsilon$  es un  $K(\varepsilon)$ -cuasicírculo, con  $K(\varepsilon) \rightarrow 1$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Concretamente, existe una aplicación  $\Upsilon_\varepsilon : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\Upsilon_\varepsilon(\partial\Delta) = P_\varepsilon$ , que es  $K(\varepsilon)$ -cuasiconforme, y  $\Upsilon_\varepsilon|_E = \text{identidad}$ .

Suponiendo probado este lema, y en vista de los dos siguientes resultados, podremos invertir (6.21).

**Lema 6.5** ([A3, p. 74-76]) Sea  $\Omega$  un cuasidisco (esto es,  $\Omega = F(\Delta)$ , donde  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es  $K$ -cuasiconforme). Entonces, la aplicación de Riemann  $f : \Delta \rightarrow \Omega$  se extiende a una aplicación  $K^2$ -cuasiconforme de  $\mathbb{C}$  en  $\mathbb{C}$ .

**Lema 6.6** ([LV, p. 70-71]). Si  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es  $K$ -cuasiconforme y  $A$  es compacto, entonces  $f|_A$  es Hölder continua con exponente  $1/K$ .

Con esto la prueba del Teorema 12 concluye del siguiente modo. Por los Lemas 6.4 y 6.5,  $\Psi_\varepsilon : \Delta \rightarrow P_\varepsilon$  se extiende a una aplicación  $\Psi_\varepsilon : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  que es  $K(\varepsilon)$ -cuasiconforme con  $K(\varepsilon) \rightarrow 1$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . El Lema 6.6 nos dice entonces que  $\Psi_\varepsilon : \partial\Delta \rightarrow \partial P_\varepsilon$  es Hölder continua con exponente  $1/(K(\varepsilon))^2$ . Es fácil comprobar que esto implica que

$$(6.22) \quad \dim(\Psi_\varepsilon^{-1}(E)) \geq \frac{1}{(K(\varepsilon))^2} \dim(E).$$

De (6.22), (6.20) y (6.17), obtenemos finalmente que

$$\dim(\{\theta : d(\theta) < +\infty\}) \geq \frac{1}{(K(\varepsilon))^2} (\delta(\mathcal{R}) - \varepsilon).$$

Puesto que  $\varepsilon > 0$  era arbitrario y  $K(\varepsilon) \rightarrow 1$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , esto termina de probar el Teorema 12. ■

Así pues, para terminar, sólo nos queda por demostrar el Lema 6.4.

**DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 6.4.** Denotemos por  $S_j, S_{j,\varepsilon}$  los sectores

$$S_j = \{re^{i\theta} : r > 0, e^{i\theta} \in I_j\},$$

$$S_{j,\varepsilon} = \{re^{i\theta} \in \Delta : \omega(re^{i\theta}, I_j) < k_\varepsilon, e^{i\theta} \in I_j\}$$

Recordemos que

$$c_j(\varepsilon) = \{Re^{i\theta} \in \Delta : \omega(Re^{i\theta}, I_j) = k_\varepsilon, e^{i\theta} \in I_j\}.$$

Definamos  $\Upsilon_\varepsilon : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  de la siguiente forma:

$$\Upsilon_\varepsilon(re^{i\theta}) = \begin{cases} re^{i\theta}, & \text{si } e^{i\theta} \in E = \partial\Delta \setminus \bigcup_{j=1}^\infty I_j, \quad r > 0, \\ r R(\theta) e^{i\theta}, & \text{si } e^{i\theta} \in I_j, \quad r > 0, \\ 0, & \text{si } r = 0, \end{cases}$$

donde  $R_\varepsilon(\theta)$  es tal que  $R_\varepsilon(\theta) e^{i\theta} \in c_j(\varepsilon)$ , es decir,

$$(6.23) \quad \omega(R_\varepsilon(\theta) e^{i\theta}, I_j) = k_\varepsilon.$$

Observemos que, por definición,  $\Upsilon_\varepsilon|_E = \text{identidad}$ , y que  $\Upsilon_\varepsilon$  transforma el sector  $S_j \cap \Delta$  en  $S_{j,\varepsilon}$  con lo que  $\Upsilon_\varepsilon$  lleva  $\Delta$  en  $P_\varepsilon$ .

Puesto que claramente  $\Upsilon_\varepsilon : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es un homeomorfismo, basta con que probemos que  $\Upsilon_\varepsilon$  es cuasiconforme en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , ya que entonces 0 es una singularidad aislada. Ahora bien, es claro que  $\Upsilon_\varepsilon$  es absolutamente continua en todos los radios  $\{re^{i\theta}\}_{r>0}$ , y es fácil ver que también lo es en todas las circunferencias  $\{re^{i\theta}\}_{0 \leq \theta < 2\pi}$ . Esto último se sigue del hecho de que la función

$$U_\varepsilon(\theta) = \begin{cases} R_\varepsilon(\theta), & \text{si } e^{i\theta} \in \partial\Delta \setminus E = \bigcup_j I_j, \\ 1, & \text{si } e^{i\theta} \in E. \end{cases}$$

donde  $R_\varepsilon(\theta)$  está definida por medio de (6.23), es absolutamente continua.

Por tanto, sólo nos queda por probar que, para  $\varepsilon$  pequeño,

$$|\mu_j(\varepsilon)| = \sup_{S_j} \left| \frac{\partial \Upsilon_\varepsilon / \partial \bar{z}}{\partial \Upsilon_\varepsilon / \partial z} \right| \leq C < 1, \quad \text{para todo } j,$$

con  $C$  una constante absoluta, y que  $|\mu(\varepsilon)| = \sup_j |\mu_j(\varepsilon)| \rightarrow 0$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Ahora bien, puesto que la composición de una aplicación  $K$ -cuasiconforme con una aplicación conforme, sigue siendo  $K$ -cuasiconforme, basta con que lo veamos para la función

$$\Theta_\varepsilon(z) = \log(\Upsilon_\varepsilon(e^z))$$

que transforma la banda

$$B_{j,\varepsilon} = \{z \in \mathbb{C} : \theta_{1,j} < \text{Im } z < \theta_{2,j}\}$$

en sí misma. Recuerdese que  $e^{i\theta_{1,j}}$  y  $e^{i\theta_{2,j}}$  son los extremos del intervalo  $I_j$ .

Pero, puesto que,

$$\Theta_\varepsilon(x + iy) = x + \log R_\varepsilon(y) + iy, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \theta_{1,j} < y < \theta_{2,j},$$



es sencillo comprobar que

$$\mu(x + iy) = \frac{\partial \Theta_\varepsilon / \partial \bar{z}}{\partial \Theta_\varepsilon / \partial z} = \frac{i R'_\varepsilon(y)}{R_\varepsilon(y) - i R'_\varepsilon(y)} .$$

Por tanto,

$$\sup_{B_{j,\varepsilon}} |\mu(x + iy)|^2 \leq \sup_{[0, 2\pi)} \frac{(U'_\varepsilon(y))^2}{(U_\varepsilon(y))^2 + (U'_\varepsilon(y))^2} .$$

Puesto que

$$R_\varepsilon(y) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1, \quad R'_\varepsilon(y) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

uniformemente en  $y \in [0, 2\pi)$ , se sigue que  $|\mu_j(\varepsilon)| \leq C < 1$ , y que

$$|\mu(\varepsilon)| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

de donde

$$K(\varepsilon) = \frac{1 + |\mu(\varepsilon)|}{1 - |\mu(\varepsilon)|} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1. \quad \blacksquare$$

# Referencias.

- [AS] Abramowitz, M., Stegun, I. A., *Handbook of Mathematical functions*. Dover Pub. Inc., novena impresión, 1.970.
- [AC] Ahern, P. R., Clark, D. N., On inner functions with  $H^p$  derivative. *Michigan Math. J.* **21** (1.974), 115-127.
- [A1] Ahlfors, L. V., *Complex analysis*. MacGraw-Hill, tercera edición, 1.979.
- [A2] Ahlfors, L. V., *Conformal invariants*. McGraw-Hill, 1.973.
- [A3] Ahlfors, L. V., *Quasiconformal mappings*. Van Nostrand Company, Inc., 1.966.
- [AL] Aleksandrov, A. B., The existence of inner functions in the ball. *Math. USSR Sb.* **46** (1.983), 143-159.
- [Ba] Bayley, W. N., *Generalized hypergeometric functions*. Cambridge University Press, 1.935.
- [Be] Beardon, A. F., *The geometry of discrete groups*. Springer-Verlag, 1.983.
- [BM] Beardon, A. F., Maskit, B., Limit points of Kleinian groups and finite sided fundamental polyhedra. *Acta Math.* **132** (1.974), 1-12.
- [B] Beurling, A., Ensembles exceptionnels. *Acta Math.* **72** (1.939), 1-13.
- [C] Carleson, L., *Selected problems on exceptional sets*. Van Nostrand, 1.967.
- [CL] Collingwood, E. F., Lohwater, A. J., *The theory of cluster sets*, Cambridge University Press, 1.966.
- [DMPV] Dodson, M. M., Melián, M. V., Pestana, D., Velani, S., Ubiquity and Patterson measure. Por aparecer en *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I*.
- [DW] Denjoy, A., Fonctions contractante le cercle  $|z| < 1$ . *C. R. Acad. Sci. Paris* **182** (1.926), 255-257.
- [Fa] Falconer, *Fractal geometry - Mathematical Foundations and Applications*. J. Wiley, 1990.
- [F] Fernández, J. L., Singularities of inner functions, *Math. Z.* **193** (1.986), 393-396.
- [F2] Fernández, J. L., Domains with strong barrier. *Rev. Mat. Iberoamericana* **5** (1.989), 47-65.
- [FM] Fernández, J. L., Melián, M. V., Bounded geodesics of Riemann surfaces and hyperbolic manifolds. Preprint, 1.993.
- [FP] Fernández, J. L., Pestana, D., Distortion of boundary sets under inner functions and applications. *Indiana Univ. Math. J.* **41** (1.992), 439-447.
- [FPR] Fernández, J. L., Pestana, D., Rodríguez, J. M., Distortion of boundary sets under inner functions, II. Preprint, 1993.

- [FR] Fernández, J. L., Rodríguez, J. M., The exponent of convergence of Riemann surfaces. Bass Riemann surfaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I* **15** (1990), 165-183.
- [G] Garnett, J., *Bounded analytic functions*. Academic Press, 1981.
- [Go] Goluzin, G. M., *Geometric theory of functions of a complex variable*. Translations of Math. Monographs, A. M. S., 1969.
- [H1] Hamilton, D., Conformal distortion of boundary sets, *Trans. Amer. Math. Soc.* **308** (1988), 69-81.
- [H2] Hamilton, D., Distortion of sets by inner functions. *Proc. Amer. Math. Soc.* **117** (1993), 771-774.
- [HH] Hall, R. R., Hayman, W. K., A problem in the theory of subordination. *J. d'Analyse Math.* **60** (1993), 99-111.
- [J] Jarník, V., Zur metrischen theorie der diophantischen approxiimationen, *Prace Mat. -Fiz.* **36** (1.928-1.929), 91-106.
- [KS] Kahane, J. P., Salem, R., *Ensembles parfaits et Séries Trigonométriques*, Hermann, 1.963.
- [K] Koosis, P., *Introduction to  $H^p$  Spaces*. London Math. Soc. Lecture Notes Series **40**, Cambridge University Press, 1.980.
- [L] Landkof, N. S., *Foundations of modern potential theory*. Springer-Verlag, 1.972.
- [LV] Lehto, O., Virtanen, K. I., *Quasiconformal mappings in the plane*. Springer-Verlag, 1.973.
- [Lø] Løw, E., A construction of inner functions on the unit ball of  $\mathbb{C}^p$ . *Invent. Math.* **67** (1.982), 294-298.
- [Li] Littlewood, J. E., *Lectures on the theory of functions*, Oxford University Press, 1.944.
- [M] Makarov, N. G., LIL for smooth measures, *Leningrad Branch of the Steklov Institute, LOMI*. Preprint, 1.988.
- [Ma] Massey, W., *Introducción a la Geometría Algebraica*. Ed. Reverté, 1972.
- [MP] Melián, M. V., Pestana, D., Geodesic excursions into cusps in finite-volume hyperbolic manifolds. *Michigan Math. J.* **40** (1.992), 77-93.
- [Ne] Nehari, Z., Some inequalities in the theory of functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* **75** (1.953), 256-286.
- [Neu] Neuwirth, J. H., Ergodicity of some mappings of the circle and the line. *Israel J. Math.* **31** (1.978), 359-367.
- [N] Nevanlinna, *Analytic functions*. Springer-Verlag, 1.970.
- [Ni] Nicholls, P., *The ergodic theory of discrete groups*. London Math. Soc. Lecture Note Series **143**, Cambridge University Press, 1.989.
- [Pa] Patterson, S. J., Diophantine approximation in Fuchsian groups. *Phil. Trans. Royal Soc.* **282** (1.976), 527-563.
- [P1] Pommerenke, Ch., *Univalent Functions*. Vandenhoeck und Ruprecht, 1.975.

- [P2] Pommerenke, Ch., Ergodic properties of inner functions, *Math. Ann.* **256** (1.981), 43-50.
- [P3] Pommerenke, Ch., On the logarithmic capacity and conformal mapping. *Duke Math.* **35** (1.968), 321-326.
- [Ro] Rogers, C. A., *Hausdorff measures*. Cabridge University Press, 1.970.
- [R1] Rudin, W., *Análisis real y complejo*. Alhambra, 1.979.
- [R2] Rudin, W., *Function theory in the unit ball of  $\mathbb{C}^n$* . Springer-Verlag, 1.980.
- [R3] Rudin, W., *New constructions of functions holomorphic in the unit ball of  $\mathbb{C}^n$* . Lecture presented at the NSF-CBMS Regional Conference hosted by Michigan State University (1.985).
- [Si] Sinai, *Introduction to ergodic theory*. Mathematical Notes **18**. Princeton University Press, 1.976.
- [S1] Stephenson, K., Analytic functions and hypergroups of function pairs. *Indiana Univ. Math. J.* **31** (1.982), 843-884.
- [S2] Stephenson, K., Construction of an inner function in the little Bloch space. *Trans. Amer. Math. Soc.* **24** (1.988), 713-720.
- [SW] Stein, E., Weiss, G., *Introduction to Fourier Analysis on euclidean spaces*. Princeton University Press, 1971.
- [Su] Sullivan, D., Related aspects of positivity in Riemannian Geometry. *J. Diff. Geom.* **25** (1987), 327-351.
- [T] Tsuji, M., *Potential theory in Modern Function theory*. Chelsea, 1959.

Reunión de la Comisión de la Universidad el día  
del ...  
Doctoral ... APTO CUM LAUDE  
Madrid, 22 de abril de 1994

J. M. Anderson

~~Joan Josep Carmona~~

Juys

~~Dr. Nicol~~

José E. Gall